

*Математика*  
*Решение открытого билета*  
*11 класс*

*Тексты задач в чистовик можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия.*

1. Упростите до числового ответа выражение

$$\left(1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{x}\right) \cdot \frac{x^3}{a^3 - x^3}$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} 1) \quad & 1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{x^2 + ax + a^2}{x^2} \\ 2) \quad & 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x} \\ 3) \quad & \frac{x^3}{a^3 - x^3} = \frac{x^3}{(a-x) \cdot (a^2 + ax + x^2)} \\ 4) \quad & \frac{x^2 + ax + a^2}{x^2} \cdot \frac{x-a}{x} \cdot \frac{x^3}{(a-x) \cdot (a^2 + ax + x^2)} = -1 \end{aligned}$$

Ответ:  $\boxed{-1}$

2. Из определенного количества яблок получили 0,6 кг сока. Найдите, сколько для этого потребовалось яблок, если из свежих яблок получается 24% сока. Ответ выразите в килограммах.

*Решение.* Свежие яблоки содержат сок (24%) и клетчатку (76%). Согласно условию, 24% сока составляет 0,6 кг, а 100% вещества составляют  $x$  кг. Тогда

$$\begin{aligned} 0,6 \text{ кг} & - 24\% \\ x \text{ кг} & - 100\% \end{aligned}$$

Отсюда,

$$x = \frac{0,6 \cdot 100}{24} = 2,5 \text{ кг.}$$

Ответ:  $\boxed{2,5}$

3. Решите неравенство  $25^{\frac{x}{2}} + \frac{20}{5^x} \geq 9$ .

*Решение.* ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$ .

Перепишем неравенство в виде

$$(5^2)^{\frac{x}{2}} + \frac{20}{5^x} - 9 \geq 0 \implies 5^x + \frac{20}{5^x} - 9 \geq 0.$$

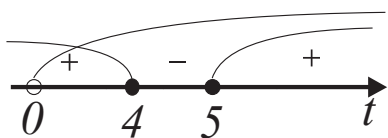
Введем новую переменную  $t = 5^x$ ,  $t > 0$ . Тогда имеем

$$\begin{cases} t + \frac{20}{t} - 9 \geq 0, \\ t > 0, \end{cases} \implies \begin{cases} t^2 - 9t + 20 \geq 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов. Найдем нули функции  $f(t) = t^2 - 9t + 20$ .

*Решение квадратного уравнения обязательно должно быть в работе!*

$$t^2 - 9t + 20 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}; \quad t_1 = 5; \quad t_2 = 4.$$



$$\begin{cases} t \leq 4, \\ t \geq 5, \\ t > 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 0 < t \leq 4, \\ t \geq 5. \end{cases}$$

Вернемся к прежней переменной:

$$\begin{cases} 0 < 5^x \leq 4, \\ 5^x \geq 5. \end{cases}$$

*Пояснения должны быть в работе обязательно!*

Так как основание показательной функции  $5 > 1$ , то показательная функция монотонно возрастающая. При переходе к неравенству для показателя степени знак неравенства сохраняется.

$$\begin{cases} x \leq \log_5 4, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

$$\implies x \in (-\infty; \log_5 4] \cup [1; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } \boxed{(-\infty; \log_5 4] \cup [1; +\infty)}$$

4. Вычислите

$$\frac{\sin \frac{7\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{30}}$$

*Решение.* Применим формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{7\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{30}} &= \frac{2 \sin \frac{\frac{7\pi}{15} - \frac{\pi}{5}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{7\pi}{15} + \frac{\pi}{5}}{2}}{-2 \sin \frac{\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{30}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{30}}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{\pi}{3}}{-2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{2\pi}{15}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1. \end{aligned}$$

Ответ:  $\boxed{-1}$

5. Решите уравнение  $(x - 3) \cdot (\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x - 1}) = 2 \cdot (x - 3)$

*Решение.* Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем общий множитель  $(x - 3)$

$$(x - 3) \cdot (\sqrt{2x - 3} + \sqrt{x - 1} - 2) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases} x - 3 = 0, \\ \sqrt{2x - 3} + \sqrt{x - 1} - 2 = 0. \end{cases}$$

Решим каждое уравнение. Затем обязательно выполним проверку, чтобы отбросить посторонние корни.

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3. \text{ Решим уравнение } \sqrt{2x - 3} + \sqrt{x - 1} - 2 = 0.$$

Уединим один из радикалов, затем возведем обе части в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня.

$$\sqrt{2x - 3} = 2 - \sqrt{x - 1}, \quad (\sqrt{2x - 3})^2 = (2 - \sqrt{x - 1})^2,$$

$$2x - 3 = 4 - 4\sqrt{x - 1} + x - 1, \quad 4\sqrt{x - 1} = 6 - x.$$

*Замечание. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы*

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{cases}$$

*Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной  $x$ :  $x \leq 6$ . Этим ограничением можно воспользоваться при отборе корней уравнения.*

Повторно возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня:  $(4\sqrt{x-1})^2 = (6-x)^2$ ,  $16x - 16 = 36 - 12x + x^2$ ,

$$x^2 - 28x + 52 = 0.$$

*Решение квадратного уравнения нужно приводить полностью!*

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 52}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{28 \pm 24}{2};$$

$x_2 = 2$  или  $x_3 = 26$  ( $x_3 = 26$  — постороннее решение, так как не удовлетворяет ограничению  $x \leq 6$ ).

**Проверка.** Подставим найденные корни в исходное уравнение.

$x_1 = 3$   $0 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2 \cdot 0$ ,  $0 = 0$  — истина  $\Rightarrow x_1 = 3$  является корнем уравнения. *Замечание. Здесь один из множителей обращается в ноль. При проверке нужно обязательно показать, что второй множитель, содержащий иррациональности, не теряет смысла.*

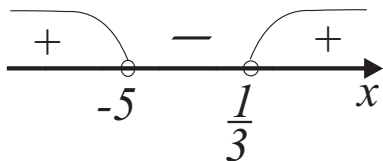
$x_2 = 2$   $-1 \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{1}) = 2 \cdot (-1)$ ,  $-2 = -2$  — истина  $\Rightarrow x_2 = 2$  является корнем уравнения.

$x_3 = 26$   $23 \cdot (\sqrt{49} + \sqrt{25}) = 2 \cdot 23 \Rightarrow 23 \cdot 12 = 23 \cdot 2$  — ложно  $\Rightarrow x_3 = 26 \in \emptyset$  (Это так же следует из вышеприведенного ограничения на значения переменной  $x$ :  $x \leq 6$ .)

Ответ:  $\boxed{2; 3}$

6. Решите неравенство  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1$

Решение. ОДЗ:  $\frac{3x-1}{x+5} > 0$ . Решим неравенство методом интервалов.



Итак, ОДЗ:  $x \in (-\infty; -5) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$ .

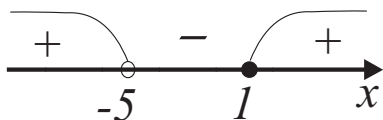
Перейдем к одинаковому основанию  $\frac{1}{3}$ .

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1 \implies \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

Так как основание логарифма  $0 < \frac{1}{3} < 1$ , то логарифмическая функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства меняется.

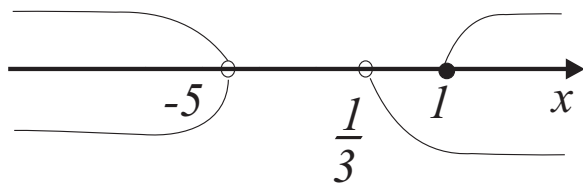
$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x+5} \geq \frac{1}{3} &\implies \frac{3x-1}{x+5} - \frac{1}{3} \geq 0 \implies \\ \frac{9x-3-x-5}{3(x+5)} \geq 0 &\implies \frac{8x-8}{3(x+5)} \geq 0 \implies \frac{x-1}{x+5} \geq 0. \end{aligned}$$

Решим неравенство методом интервалов.



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$ .

Учитывая ОДЗ, получим



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

Ответ:  $(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

7. Дано уравнение

$$\sin(3\pi - 2x) + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x).$$

а) Решите уравнение.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\frac{\pi}{2}; 2\pi)$ .

*Решение.* а) Найдем общее решение уравнения. Воспользуемся формулами приведения:

$$\sin(3\pi - 2x) = \sin 2x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x \implies 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = \sin x + \cos x,$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x \implies (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (\sin x + \cos x - 1) = 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, & n \in Z; \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, & k \in Z; \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, & m \in Z; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, & n \in Z; \\ x = 2\pi k, & k \in Z; \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, & m \in Z. \end{cases}$$

б) Найдем углы, удовлетворяющие условию  $[\frac{\pi}{2}; 2\pi)$ . Подставим в общее решение  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in Z$ , целые значения  $n$ . Так как задан отрезок положительных значений углов, то и значения  $n$  будем брать целые положительные.

$$n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi), \quad n = 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi).$$

Подставим в общее решение  $x = 2\pi k$ ,  $k \in Z$ , целые значения  $k$ . Так как задан отрезок положительных значений углов, то и значения  $k$  будем брать целые положительные. Убеждаемся, что ни при каких значениях  $k$   $x \notin [\frac{\pi}{2}; 2\pi)$ .

Подставим в общее решение  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ ,  $m \in Z$ , целые значения  $m$ . Так как задан отрезок положительных значений углов, то и значения  $m$  будем брать целые положительные.

$$m = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi).$$

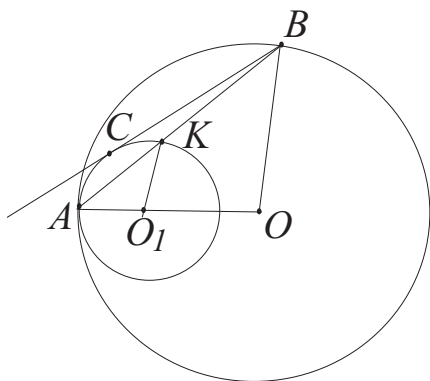
Для остальных  $n, m$   $x \notin [\frac{\pi}{2}; 2\pi).$

$$\text{Ответ: } \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{4}; \quad \frac{7\pi}{4}}$$

*Замечание.* Как общее решение, так и отобранные углы могут быть записаны только в градусах. При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например,  $x = 90^\circ + 2\pi n$  считается грубой ошибкой.

8. Две окружности радиусами  $r$  и  $R$  касаются внутренним образом в точке  $A$ . Через точку  $B$ , лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке  $C$ . Найдите радиус малой окружности, если  $R = 25$ ,  $AB = 35$ ,  $BC = 28$ .



*Решение.* По свойству касательной  $BC^2 = AB \cdot BK$ .

Отсюда  $BK = \frac{BC^2}{AB} = \frac{112}{5}$ . Так как  $AB = AK + BK$ ,

то  $AK = AB - BK$ ,  $AK = 35 - \frac{112}{5} = \frac{63}{5}$ .

Рассмотрим  $\triangle OAB$  и  $\triangle O_1AK$ . Они подобны (по двум углам):  $\triangle OAB$  и  $\triangle O_1AK$  равнобедренные и  $\angle A$  — общий. Тогда

$$\frac{r}{R} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow r = R \cdot \frac{AK}{AB} = 25 \cdot \frac{63}{5} = 9.$$

Итак, радиус малой окружности  $r = 9$ .

Ответ:  $\boxed{9}$

*Геометрическая задача оценивается максимальным баллом, если правильно выполнен чертеж; приведены буквенные выражения искомым*

величин, и лишь затем подставлены их числовые значения; приведено полное обоснование с ссылками на геометрические свойства, теоремы, признаки подобия.

9. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x^2 - (3a - 1)|x| + 2a^2 - a = 0$$

имеет четыре различных решения?

*Решение.* ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

*И способ.* Введем новую переменную. Пусть  $t = |x|$ ,  $t \geq 0$ . Эту задачу можно сформулировать иначе: “При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $t^2 - (3a - 1)t + 2a^2 - a = 0$  имеет два различных положительных корня ?” Действительно, если, уравнение имеет два различных положительных корня  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_1 \neq t_2$ ), то исходное уравнение имеет четыре различных корня  $t_1$ ,  $-t_1$ ,  $t_2$ ,  $-t_2$  (более четырех корней исходное уравнение иметь не может, поскольку при  $x \geq 0$  и при  $x < 0$  это уравнение — квадратное).

Найдем корни уравнения  $t^2 - (3a - 1)t + 2a^2 - a = 0$ . Вычислим дискриминант  $D$ :

$$D = (3a - 1)^2 - 4(2a^2 - a) = 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 4a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2,$$

откуда  $t_1 = a$ ,  $t_2 = 2a - 1$ .

Исходное уравнение имеет четыре корня тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три условия:  $t_1 > 0$ ,  $t_2 > 0$ ,  $t_1 \neq t_2$ . Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} a > 0, \\ 2a - 1 > 0, \\ 2a - 1 \neq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Итак,  $a \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Ответ:  $\boxed{(\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)}$

*Замечание.* В том случае, когда корни квадратного уравнения легко выразить через параметр (то есть дискриминант является полным квадратом некоторого выражения), данный способ решения,



использующий явное выражение для корней, является одним из наиболее рациональных. А как поступить в общем случае? II способ решения задачи основан на применении условий расположения корней квадратичной функции относительно заданных точек и предлагается для самостоятельного решения.

Задача с параметром оценивается максимальным баллом при наличии подробного обоснованного решения с необходимыми словесными пояснениями. Набор формул с правильным ответом без обоснования и пояснений оценивается минимальным баллом. Правильный ответ без обоснований и пояснений — 0 баллов.

Замечание. После решения всех задач билета нужно заполнить таблицу ответов, помещенную на первой странице чистовика. Если Вы не приступали к решению задачи, то в клетке поставьте прочерк. Например, для данного открытого билета заполненная таблица ответов выглядит так

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
-1	2,5	$(-\infty; \log_5 4] \cup [1; +\infty)$	-1	2; 3	$(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$
<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>			
$\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$	9	$(\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$			