Математика
Решение открытого билета
10 класс

Тексты задач в чистовик можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия.

1. Упростите до числового ответа выражение

$$\left(x+2+\frac{8}{x-2}\right):\frac{x^2+4}{4-4x+x^2}-x$$

Решение.

1) $x+2+\frac{8}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)+8}{x-2}=\frac{x^2-4+8}{x-2}=\frac{x^2+4}{x-2}$

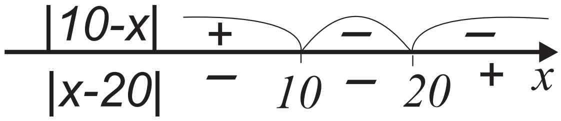
2) $\frac{x^2+4}{x-2}:\frac{x^2+4}{4-4x+x^2}=\frac{x^2+4}{x-2}\cdot\frac{4-4x+x^2}{x^2+4}=\frac{x^2+4}{x-2}\cdot\frac{(x-2)^2}{x^2+4}=x-2$

3) $x-2-x=-2$

Ответ: $\boxed{-2}$

2. Решите уравнение $\qquad |10-x|+|x-20|=10$

Решение. Приравняем к нулю выражения под знаком модуля: $10-x=0$, $x-20=0$. Точки $x=10$ и $x=20$ нанесем на числовую прямую. Эти точки делят числовую прямую на три промежутка. Решим уравнение на каждом из них, раскрывая знаки модулей. На рисунке укажем знаки на каждом промежутке.



I. $x\in(-\infty;10)$ $\qquad 10-x+20-x=10,$ $\quad x=10\notin(-\infty;10).$

II. $x\in[10;20)$ $\qquad x-10+20-x=10,$ $\quad 20=20$ выполняется для всех $x\in[10;20)\Rightarrow x\in[10;20).$

III. $x\in[20;+\infty)$ $\qquad x-10+x-20=10,$ $\quad x=20\in[20;+\infty).$

Указание. На каждом промежутке нужно сделать вывод об отборе решения!

Объединим все решения: $x\in[10;20]$.

Ответ: $\boxed{[10;20]}$

3. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

Решение. Пусть x л/мин пропускает первая труба. Тогда $x+1$ л/мин пропускает вторая труба. По данным задачи составим таблицу

	S	v	$t=\frac{S}{v}$
1 труба	110 *л*	x *л/мин*	t_1 *мин*
2 труба	110 *л*	$x+1$ *л/мин*	t_2 *мин*

Так как $t_1 - t_2 = 1$ *мин*, то составим уравнение

$$\frac{110}{x} - \frac{110}{x+1} = 1, \quad x > 0;$$

$$\frac{110(x+1-x)}{x(x+1)} = 1; \qquad x^2 + x - 110 = 0.$$

Решение квадратного уравнения нужно приводить полностью!

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 110}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{-1 \pm 21}{2};$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -11\text{— посторонний корень.}$$

Ответ: $\boxed{10 \text{ л/мин}}$

4. Найдите число x, если

$$\frac{\left(\sqrt[6]{4}\right)^5 \cdot 16^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{64}\cdot x} = (16)^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$$

*Решение.*ОДЗ: $x \neq 0$. Применим формулы

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{x\cdot y}.$$

$$\frac{2^{\frac{2}{6}\cdot 5} \cdot 2^{4\cdot\frac{1}{2}}}{2^{6\cdot\frac{1}{3}}\cdot x} = 2^{4\cdot\frac{1}{6}} \cdot (2^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{2^{\frac{5}{3}}\cdot 2^2}{2^2 \cdot x} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-1}; \quad x = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-1}} = 2^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} \cdot 2 = 2\cdot 2 = 4.$$

Ответ: $\boxed{4}$

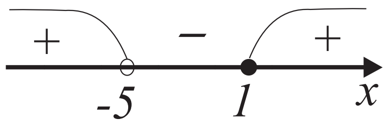
5. Решите неравенство $\frac{3x-1}{x+5} \geq \frac{1}{3}$

Решение. ОДЗ: $x \neq -5$.

$$\frac{3x-1}{x+5} \geq \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+5} - \frac{1}{3} \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{9x-3-x-5}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8x-8}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{x+5} \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Найдем нули числителя и знаменателя: $x-1=0$, $x+5=0 \Longrightarrow$ $x=1$, $x=-5$.



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

Ответт: $\boxed{(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)}$

6. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} = 2$

Решение.

Уединим один из радикалов, затем возведем обе части в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня.

$\sqrt{2x-3} = 2 - \sqrt{x-1}$, $\quad \left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{x-1}\right)^2$,

$2x-3 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x - 1$, $\qquad 4\sqrt{x-1} = 6 - x$.

Замечание. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{cases}$$

Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной x: $\quad x \leq 6$. *Этим ограничением можно воспользоваться при отборе корней уравнения.*

Повторно возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня: $\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 = (6-x)^2$, $\qquad 16x - 16 = 36 - 12x + x^2$,

$$x^2 - 28x + 52 = 0.$$

Решение квадратного уравнения нужно приводить полностью!

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 52}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{28 \pm 24}{2};$$

$x_1 = 2$ или $x_2 = 26$ ($x_2 = 26$ — *постороннее решение, так как не удовлетворяет ограничению* $x \leq 6$).

Проверка. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

$x_1 = 2$ $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2,$ $2 = 2$ — истина $\Rightarrow$ $x_2 = 2$ является корнем уравнения.

$x_2 = 26$ $\sqrt{49} + \sqrt{25} = 2 \Rightarrow 12 = 2$ — ложно $\Rightarrow$ $x_2 = 26 \in \varnothing$ (Это так же следует из вышеприведенного ограничения на значения переменной x: $x \leq 6$.)

Ответ: $\boxed{2}$

7. В геометрической прогрессии сумма первого и пятого членов равна 51, сумма второго и шестого членов равна 102. Сколько членов прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

Дано: $b_1 + b_5 = 51$, $b_2 + b_6 = 102$, $S_n = 3069$. Найти $n = ?$ ($n \in N$)

Решение. Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

По условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 + b_5 = 51, \\ b_2 + b_6 = 102 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_1 q^4 = 51, \\ b_1 q + b_1 q^5 = 102 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot \left(1 + q^4\right) = 51, \\ b_1 q \cdot \left(1 + q^4\right) = 102 \end{cases}$$

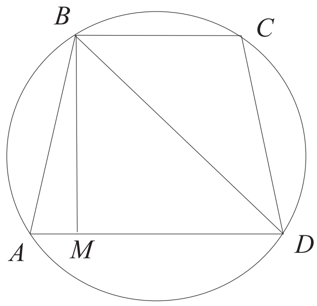
Разделим второе уравнение системы на первое, получим $q = 2$. Подставим $q = 2$ в первое уравнение системы, получим $b_1 = 3$. Тогда по формуле суммы n первых членов

$$S_n = \frac{b_1 \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

получаем $3 \cdot (2^n - 1) = 3069 \Rightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$.

Ответ: $\boxed{10}$

8. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $AD = 3\sqrt{10}$, основание $BC = \sqrt{10}$, высота $BM = 2\sqrt{10}$. Найдите радиус описанной окружности.



Решение. Окружность, описанная около трапеции, является также описанной вокруг $\triangle ABD$. По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = 2R.$$

В $\triangle ABM$ найдем AM. Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $AM = \frac{AD-BC}{2} = \sqrt{10}$; по теореме Пифагора $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{50}$.

В $\triangle BMD$ найдем $MD = BC + AM = 2\sqrt{10}$;

по теореме Пифагора $BD = \sqrt{MD^2 + BM^2} = \sqrt{80}$.

Отсюда находим $\sin\angle ADB = \frac{MD}{BD} = \frac{2}{\sqrt{8}}$. Тогда

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ADB} = \frac{\sqrt{50}}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{400}}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Ответ: $\boxed{5}$.

Геометрическая задача оценивается максимальным баллом, если правильно выполнен чертеж; приведены буквенные выражения искомых величин, и лишь затем подставлены их числовые значения; приведено полное обоснование с ссылками на геометрические свойства, теоремы, признаки подобия.

9. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(4x^2 - (9a+8)x + 5a^2 + 10a\right)\cdot\sqrt{x-9} = 0$$

имеет ровно два различных решения?

Решение. ОДЗ: $x \geq 9, \quad a \in R.$

Если $x = 9$, то уравнение уже имеет одно решение при любом a. Тогда второе решение данного уравнения может быть получено при выполнении условий:

1) $D = 0$ и единственный корень принадлежит ОДЗ;

2) $D > 0$, но $x_1 \in$ ОДЗ, а $x_2 \notin$ ОДЗ; или $x_1 \notin$ ОДЗ, а $x_2 \in$ ОДЗ.

Исследуем эти случаи.

1) $D = 0$; $D = a^2 - 16a + 64 = 0$, $D = (a-8)^2$.

$$x_{1,2} = \frac{9a + 8 \pm \sqrt{(a-8)^2}}{8} = \frac{9a + 8 \pm (a-8)}{8};$$

$$x_1 = \frac{5}{4}a, \quad x_2 = a + 2$$

Если $a = 8$, то $x_1 = x_2 = 10 \in [9; +\infty)$. Поэтому при $a = 8$ уравнение имеет ровно два решения: $x_1 = 9$ и $x_2 = 10$.

2) $D > 0$. Тогда $a \neq 8$, $x_1 = \frac{5}{4}a$, $x_2 = a + 2$. Решим совокупность систем

$$\left\{\begin{array}{rl} a+2 > & 9, \\ \frac{5}{4}a \leq & 9 \end{array}\right. \qquad \text{или} \qquad \left\{\begin{array}{rl} a+2 \leq & 9, \\ \frac{5}{4}a > & 9 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rl} a > & 7, \\ a \leq & \frac{36}{5}, \end{array}\right. \qquad \text{или} \qquad \left\{\begin{array}{rl} a \leq & 7, \\ a > & \frac{36}{5}. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем решение первой системы: $a \in \left(7; \frac{36}{5}\right]$; решение второй системы: $a \in \varnothing$.

Ответ: $\boxed{a \in \left(7; \frac{36}{5}\right] \cup \{8\}}$

Задача с параметром оценивается максимальным баллом при наличии подробного обоснованного решения с необходимыми словесными пояснениями. Набор формул с правильным ответом без обоснования и пояснений оценивается минимальным баллом. Правильный ответ без обоснований и пояснений — 0 баллов.

Замечание. После решения всех задач билета нужно заполнить таблицу ответов, помещенную на первой странице чистовика. Если Вы не приступали к решению задачи, то в клетке поставьте прочерк. Например, *для данного открытого билета заполненная таблица ответов выглядит так*

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
-2	$[10;20]$	10	4	$(-\infty;-5)\cup[1;+\infty)$	2	10	5	$(7;\frac{36}{5}]\cup\{8\}$