Решение варианта

Замечание. Тексты задач в чистовик можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия.

1. Упростите до числового ответа выражение

$$\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)\cdot\frac{x^3}{a^3-x^3}$$

   Решение.

   1) $1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}=\frac{x^2+ax+a^2}{x^2}$

   2) $1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$

   3) $\frac{x^3}{a^3-x^3}=\frac{x^3}{(a-x)\cdot(a^2+ax+x^2)}$

   4) $\frac{x^2+ax+a^2}{x^2}\cdot\frac{x-a}{x}\cdot\frac{x^3}{(a-x)\cdot(a^2+ax+x^2)}=-1$

   Ответ: $\boxed{-1}$

2. Из определенного количества яблок получили 0,6 кг сока. Найдите, сколько для этого потребовалось яблок, если из свежих яблок получается 24% сока. Ответ выразите в килограммах.

   Решение. Свежие яблоки содержат сок (24%) и клетчатку (76%). Согласно условию, 24% сока составляет 0,6 кг, а 100% вещества составляют x кг. Тогда

$$\begin{aligned} 0{,}6 &\quad \text{кг} - 24\% \\ x &\quad \text{кг} - 100\% \end{aligned}$$

   Отсюда,

$$x=\frac{0,6\cdot 100}{24}=2,5 \quad \text{кг.}$$

   Ответ: $\boxed{2{,}5}$

3. Решите неравенство $\qquad 25^{\frac{x}{2}}+\frac{20}{5^x}\geq 9.$

   Решение. ОДЗ: $x\in R$.

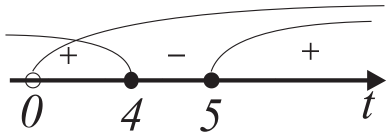
   Перепишем неравенство в виде

$$\left(5^2\right)^{\frac{x}{2}}+\frac{20}{5^x}-9\geq 0 \Longrightarrow 5^x+\frac{20}{5^x}-9\geq 0.$$

Введем новую переменную $t = 5^x$, $t > 0$. Тогда имеем

$$\begin{cases} t + \frac{20}{t} - 9 \geq 0, \\ t > 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} t^2 - 9t + 20 \geq 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы методом интервалов.



$$\begin{cases} t \leq 4, \\ t \geq 5, \\ t > 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 0 < t \leq 4, \\ t \geq 5. \end{array} \right.$$

Вернемся к прежней переменной:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < 5^x \leq 4, \\ 5^x \geq 5. \end{array} \right.$$

Так как основание показательной функции $5 > 1$, то показательная функция монотонно возрастающая. При переходе к неравенству для показателя степени знак неравенства сохраняется.

$$\left[\begin{array}{l} x \leq \log_5 4, \\ x \geq 1. \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \quad x \in (-\infty; \log_5 4] \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $\boxed{(-\infty; \log_5 4] \cup [1; +\infty)}$

4. Вычислите

$$\frac{\sin \frac{7\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{30}}$$

Решение. Применим формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\frac{\sin \frac{7\pi}{15} - \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{30}} = \frac{2 \sin \frac{\frac{7\pi}{15} - \frac{\pi}{5}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{7\pi}{15} + \frac{\pi}{5}}{2}}{-2 \sin \frac{\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{30}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{30}}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{15}\cdot\cos\frac{\pi}{3}}{-2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{2\pi}{15}} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1.$$

Ответ: $\boxed{-1}$

5. Решите уравнение $\quad (x-3)\cdot\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\right) = 2\cdot(x-3)$

Решение. Перенесем все слагаемые в одну сторону и вынесем общий множитель $(x-3)$

$$(x-3)\cdot\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}-2\right) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ \sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}-2=0. \end{array}\right.$$

Решим каждое уравнение. Затем обязательно выполним проверку, чтобы отбросить посторонние корни.

$x-3=0 \Rightarrow x_1 = 3$. Решим уравнение $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}-2=0$.

Уединим один из радикалов, затем возведем обе части в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня.

$\sqrt{2x-3} = 2-\sqrt{x-1}, \quad \left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = \left(2-\sqrt{x-1}\right)^2,$

$2x-3 = 4-4\sqrt{x-1}+x-1, \qquad 4\sqrt{x-1} = 6-x.$

Замечание. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x)\geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{array}\right.$$

Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной x*:* $\quad x \leq 6$. *Этим ограничением можно воспользоваться при отборе корней уравнения.*

Повторно возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня: $\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 = (6-x)^2, \qquad 16x-16 = 36-12x+x^2,$ $x^2-28x+52=0, \qquad x_2 = 2 \quad$ или $\quad x_3 = 26 \quad (x_3 = 26$ — *постороннее решение, так как не удовлетворяет ограничению* $\quad x \leq 6)$.

Проверка. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

$x_1 = 3 \qquad 0\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 2\cdot 0,\ \ 0 = 0$ — истина $\Rightarrow\ \ x_1 = 3$ является корнем уравнения. *Замечание. Здесь один из множителей обращается в ноль. При проверке нужно обязательно показать, что второй множитель, содержащий иррациональности, не теряет смысла.*

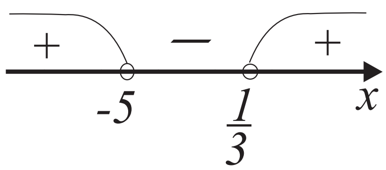
$x_2 = 2 \qquad -1\cdot(\sqrt{1}+\sqrt{1}) = 2\cdot(-1), \qquad -2 = -2$ — истина $\Rightarrow\ \ x_2 = 2$ является корнем уравнения.

$x_3 = 26 \qquad 23\cdot(\sqrt{49}+\sqrt{25}) = 2\cdot 23 \ \ \Rightarrow\ \ 23\cdot 12 = 23\cdot 2$ — ложно $\Rightarrow$ $x_3 = 26 \in \varnothing$ (Это так же следует из вышеприведенного ограничения на значения переменной x: $x \leq 6$.)

Ответ: $\boxed{2;\ \ 3}$

6. Решите неравенство $\qquad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1$

Решение. ОДЗ: $\frac{3x-1}{x+5} > 0$. Решим неравенство методом интервалов.



Итак, ОДЗ: $x \in (-\infty; -5) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Перейдем к одинаковому основанию $\frac{1}{3}$.

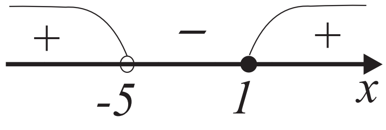
$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}.$$

Так как основание логарифма $0 < \frac{1}{3} < 1$, то логарифмическая функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства меняется.

$$\frac{3x-1}{x+5} \geq \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+5} - \frac{1}{3} \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

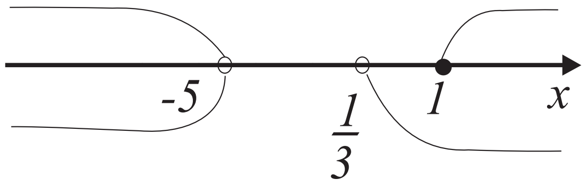
$$\frac{9x-3-x-5}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8x-8}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{x+5} \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов.



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

Учитывая ОДЗ, получим



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

Ответ: $\boxed{(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)}$

7. Найдите общее решение уравнения

$$\sin(3\pi - 2x) + 1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x).$$

В ответе запишите углы, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Решение. Найдем общее решение уравнения. Воспользуемся формулами приведения:

$$\sin(3\pi - 2x) = \sin 2x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x \implies 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = \sin x + \cos x,$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x \implies (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (\sin x + \cos x - 1) = 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x = 1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg} x = -1, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z; \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in Z; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \\ x = 2\pi k, \quad k \in Z; \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in Z. \end{array}\right.$$

Найдем углы, удовлетворяющие условию $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$. Подставим в общее решение $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z$, целые значения n. Так как задан отрезок положительных значений углов, то и значения n будем брать целые положительные.

$n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi), \qquad n = 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi).$

Подставим в общее решение $x = 2\pi k, \quad k \in Z$, целые значения k. Так как задан отрезок положительных значений углов, то и значения k будем брать целые положительные. Убеждаемся, что ни при каких значениях $k \quad x \notin [\frac{\pi}{2}; 2\pi)$.

Подставим в общее решение $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in Z$, целые значения m. Так как задан отрезок положительных значений углов, то и значения m будем брать целые положительные.

$m = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{2}; 2\pi)$.

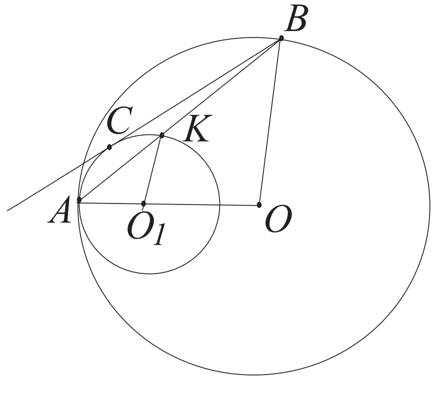
Для остальных $\quad n, m \quad x \notin [\frac{\pi}{2}; 2\pi)$.

Ответ: $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \quad x = 2\pi k, \quad k \in Z;}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in Z; \quad \frac{\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{4}; \quad \frac{7\pi}{4}}$

Замечание. Как общее решение, так и отобранные углы могут быть записаны только в градусах.При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например, $x = 90^\circ + 2\pi n$ *считается грубой ошибкой.*

8. Две окружности радиусами r и R касаются внутренним образом в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найдите радиус малой окружности, если $R = 25, \quad AB = 35, \quad BC = 28$.



Решение. По свойству касательной $\quad BC^2 = AB \cdot BK$.

Отсюда $BK = \frac{BC^2}{AB} = \frac{112}{5}$. $\quad$ Так как $\quad AB = AK + BK$,

то $AK = AB - BK, \quad AK = 35 - \frac{112}{5} = \frac{63}{5}$.

Рассмотрим $\triangle OAB$ и $\triangle O_1AK$. Они подобны (*по двум углам*): $\triangle OAB$ и

$\triangle O_1AK$ равнобедренные и $\angle A$ — общий. Тогда

$$\frac{r}{R} = \frac{AK}{AB} \quad \Rightarrow \quad r = R \cdot \frac{AK}{AB} = 25 \cdot \frac{63}{5} = 9.$$

Итак, радиус малой окружности $r = 9$.

Ответ: $\boxed{9}$

9. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - (3a-1)|x| + 2a^2 - a = 0$$

имеет четыре различных решения?

Решение. ОДЗ: $x \in R, \quad a \in R.$

I способ. Введем новую переменную. Пусть $t = |x|, \quad t \geq 0$. Эту задачу можно сформулировать иначе: “При каких значениях параметра a уравнение $t^2 - (3a-1)t + 2a^2 - a = 0$ имеет два различных положительных корня ?” Действительно, если, уравнение имеет два различных положительных корня t_1 и t_2 $(t_1 \neq t_2)$, то исходное уравнение имеет четыре различных корня $t_1, \quad -t_1, \quad t_2 \quad -t_2$ (более четырех корней исходное уравнение иметь не может, поскольку при $x \geq 0$ и при $x < 0$ это уравнение — квадратное).

Найдем корни уравнения $t^2 - (3a-1)t + 2a^2 - a = 0$. Вычислим дискриминант D:

$$D = (3a-1)^2 - 4(2a^2-a) = 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2,$$

откуда $t_1 = a, \quad t_2 = 2a - 1.$

Исходное уравнение имеет четыре корня тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три условия: $t_1 > 0, \quad t_2 > 0, \quad t_1 \neq t_2$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} a > 0, \\ 2a - 1 > 0, \\ 2a - 1 \neq a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Итак, $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty).$

Ответ: $\boxed{\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)}$

Замечание. В том случае, когда корни квадратного уравнения легко выразить через параметр (то есть дискриминант является полным квадратом некоторого выражения), данный способ решения, использующий явное выражение для корней, является одним из наиболее рациональных. А как поступить в общем случае? II способ решения задачи основан на применении условий расположения корней квадратичной функции относительно заданных точек и предлагается для самостоятельного решения.

Замечание. После решения всех задач варианта абитуриент заполняет таблицу ответов, помещенную на первой странице чистовика. Например, для Демо-варианта заполненная таблица ответов выглядит так

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
-1	2,5	$(-\infty; \log_5 4] \cup [1; +\infty)$	-1	2; 3	$(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

7	**8**	**9**
$\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$	9	$(\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$