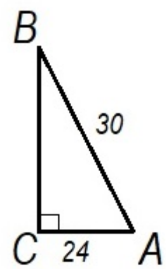
Прикладная Математика
Решение открытого билета

Тексты задач можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия задачи.

1. К источнику с ЭДС $\varepsilon = 85$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 75 В? Ответ выразите в омах.
   Решение.
   $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$
   $$\frac{85R}{R+1} \geq 75; \quad \text{так как } R+1>0 \qquad 85R \geq 75R+75; \qquad 10R \geq 75; \quad R \geq 7,5.$$
   Ответ: $\boxed{7{,}5 \text{ Ом}}$
2. Вычислите
   $$\log_{12} 160 + \log_{12} 0,9 + 3 \cdot 0,5^{\log_{0,5} 16}$$
   Решение. Преобразуем выражение, используя свойства логарифма:
   $\log_a x + log_a y = \log_a (x \cdot y)$, $\quad \log_a x^k = k \cdot \log_a x$, $\quad \log_a a = 1$ и основное логарифмическое тождество $\quad a^{\log_a x} = x$
   $$\log_{12} 160 + \log_{12} 0,9 + 3 \cdot 0,5^{\log_{0,5} 16} = \log_{12} (160 \cdot 0,9) + 3 \cdot 16 =$$
   $$= \log_{12} 144 + 48 = \log_{12} 12^2 + 48 = 2 \cdot \log_{12} 12 + 48 = 2 + 48 = 50.$$
   Ответ: $\boxed{50}$
   При решении задач вычисления выполняются "вручную". Использование калькулятора запрещено.
3. Решите уравнение $\qquad \sqrt{x+11} = x-1.$
   Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения:
   $\left(\sqrt{x+11}\right)^2 = (x-1)^2, \qquad x+11 = x^2-2x+1, \quad x^2-3x-10=0.$
   Решение квадратного уравнения нужно приводить полностью!
   $$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2};$$
   $x_1 = 5 \quad$ или $\quad x_2 = -2.$
   Проверка. Подставим найденные корни в исходное уравнение.
   $x_1 = 5 \qquad \sqrt{16} = 4, \qquad 4 = 4$ — истина $\Rightarrow \ x_1 = 5$ является корнем уравнения.
   $x_2 = -2 \qquad \sqrt{9} = -3 \ \Rightarrow \ 3 = -3$ — ложно $\Rightarrow x_2 = -2$ — посторонний корень.
   Абитуриент может привести другое решение задачи. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы
   $$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{cases}$$
   Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной $\quad x-1 \geq 0 \Rightarrow$

$x \geq 1$. Если решение иррационального уравнения сведено к решению системы, то воспользуемся этим ограничением для отбора корней уравнения: $x_2 = -2$ — посторонний корень, так как не удовлетворяет ограничению на значения переменной $x \geq 1$.
Ответ: $\boxed{5}$

4. В $\triangle ABC$ угол $C = 90°$, $AB = 30$, $AC = 24$. Найдите $\sin A$.
Решение.
Обязательно сделайте чертеж! Чертеж выполняется ручкой. Разрешается пользоваться линейкой. Задача оценивается максимальным баллом, если правильно выполнен чертеж; приведены буквенные выражения искомых величин, и лишь затем подставлены их числовые значения; решение полное и обоснованное с ссылками на геометрические свойства, признаки подобия, теоремы (например, "по теореме Пифагора").



$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

По теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{(30-24)\cdot(30+24)} =$$

$$= \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 9} = 6 \cdot 3 = 18$$

Тогда $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.
Ответ: $\boxed{\frac{3}{5}}$

5. Найдите значение выражения
$$\frac{18 \sin\alpha \cos\alpha}{\sin 2\alpha}$$
Решение. Используем формулу двойного угла $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\frac{18 \sin\alpha \cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{18 \sin\alpha \cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{18}{2} = 9.$$

Ответ: $\boxed{9}$

6. Найдите значение выражения

$$\frac{a+b}{ab}\left(\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)$$

Решение. Используем формулы сокращенного умножения

$$\frac{a+b}{ab}\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)=\frac{a+b}{ab}\left(\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}-\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}\right)=$$

$$=\frac{a+b}{ab}\left(a+b-\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right)=\frac{a+b}{ab}\left(\frac{(a+b)^2-(a^2+ab+b^2)}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a+b}{ab}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2-a^2-ab-b^2}{a+b}=\frac{ab}{ab}=1.$$

Ответ: $\boxed{1}$

7. Вычислите

$$3\frac{\sqrt[6]{m}\,\sqrt[12]{m}}{\sqrt[4]{m}}$$

Решение.

$$3\cdot\frac{\sqrt[6]{m}\,\sqrt[12]{m}}{\sqrt[4]{m}}=3\cdot\frac{m^{\frac{1}{6}}\cdot m^{\frac{1}{12}}}{m^{\frac{1}{4}}}=3\cdot m^{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}}=3\cdot m^{\frac{2+1-3}{12}}=3m^0=3.$$

Ответ: $\boxed{3}$

8. Решите неравенство $\quad 6^{x^2-3x}\le\left(\frac{1}{36}\right)^{x-1}$

Решение. ОДЗ: $x\in R$.

Приведем обе части неравенства к одинаковому основанию 6.

$$6^{x^2-3x}\le 6^{-2(x-1)};\qquad 6^{x^2-3x}\le 6^{-2x+2}.$$

Так как основание показательной функции $6>1$, то показательная функция возрастает, знак неравенства сохраняется: $x^2-3x\le-2x+2,\quad x^2-x-2\le 0.$

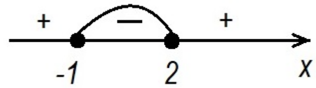
Решим неравенство методом интервалов. Рассмотрим функцию

$f(x)=x^2-x-2$. Найдем нули функции — критические точки.

$$x^2-x-2=0,\quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(-2)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}.$$

$$x_1=2,\quad x_2=-1\;\Rightarrow\;(x+1)(x-2)\le 0$$

Критические точки разбивают числовую ось на три интервала. Отмечаем точки на числовой оси. Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале. Чередование знаков фиксируем на рисунке. Исследуем сами критические точки: неравенство нестрогое, точки входят во множество решений.



Тогда решение исходного неравенства: $x\in[-1;2]$.

Ответ: $\boxed{[-1;2]}$

9. Решите неравенство $\log_{0,1}(10-2x) < \log_{0,1}(4x-8)$

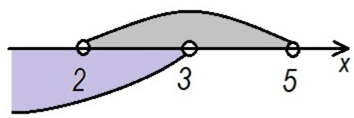
Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} 10-2x > 0, \\ 4x-8 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x > -10, \\ 4x > 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 5, \\ x > 2. \end{cases}$$

Итак, ОДЗ: $x \in (2;5)$.

Основания логарифма одинаковые, но так как основание логарифма $0 < 0{,}1 < 1$, то логарифмическая функция убывает. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства меняется на противоположный

$$10-2x > 4x-8; \qquad 6x < 18; \qquad x < 3.$$



Решение неравенства: $x \in (-\infty;3)$.

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (2;3)$. Это пересечение множеств — решения неравенства и области допустимых значений — является решением исходного неравенства.

Ответ: $\boxed{(2;3)}$

10. Решите уравнение $6\cos^2 x - 5\sin(-x) - 2 = 0$.

Решение. Так как $\sin(-x) = -\sin x$, то уравнение принимает вид $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$. Преобразуем уравнение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Тогда уравнение примет вид

$$6\left(1-\sin^2 x\right) + 5\sin x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0.$$

Пусть $\sin x = t, \quad t \in [-1;1]$.

$$6t^2 - 5t - 4 = 0$$

Решение квадратного уравнения нужно приводить полностью!

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot(-4)\cdot 6}}{2\cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{5 \pm 11}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{4}{3}, \\ t_2 = -\frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Корень уравнения $t_1 = \frac{4}{3}$ — посторонний, так как $t_1 \notin [-1;1]$.

$t_2 = -\frac{1}{2} \in [-1;1]$. Обратная замена: $\sin x = -\frac{1}{2}$, отсюда имеем совокупность решений

$$\left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in Z; \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, & k \in Z. \end{array} \right.$$

Ответ: $\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in Z}$.

Множество решений простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$ *можно записать в виде* $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$. *Так же решение уравнения может быть записано только в градусах* $x = -30^\circ + 360^\circ n$, $x = -150^\circ + 360^\circ k$, $n, k \in Z$. *При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например,* $x = -30^\circ + 2\pi n$ *считается грубой ошибкой.*