Математика
Решение открытого билета

Тексты задач можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия задачи.

1. Вычислите
$$\log_4 48 - \log_4 3 + 6^{\frac{1}{\lg 24}} \cdot 4^{\frac{1}{\lg 24}}$$

Решение. Преобразуем выражение, используя свойства логарифма $\log_a x - log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$, $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, $\log_a a = 1$, правило действия со степенями $a^p \cdot b^p = (ab)^p$, формулу перехода к новому основанию $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ и основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$

$$\log_4 48 - \log_4 3 + 6^{\frac{1}{\lg 24}} \cdot 4^{\frac{1}{\lg 24}} = \log_4 \frac{48}{3} + (6 \cdot 4)^{\frac{1}{\lg 24}} = \log_4 16 + 24^{\log_{24} 10} =$$

$$= \log_4 4^2 + 10 = 2 \cdot \log_4 4 + 10 = 2 + 10 = 12$$

Ответ: $\boxed{12}$

При решении задач вычисления выполняются “вручную”. Использование калькулятора запрещено.

2. Решите уравнение $\quad 4\sqrt{x-1} = 6 - x.$

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения:

$\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 = (6-x)^2, \qquad 16(x-1) = 36 - 12x + x^2, \quad x^2 - 28x + 52 = 0.$

Решение квадратного уравнения нужно приводить полностью!

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 52}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{28 \pm 24}{2};$$

$x_1 = 2 \quad$ или $\quad x_2 = 26.$

Проверка. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

$x_1 = 2 \qquad 4 \cdot \sqrt{1} = 4, \qquad 4 = 4$ — истина $\Rightarrow$ $x_1 = 2$ является корнем уравнения.

$x_2 = 26 \qquad 4 \cdot \sqrt{25} = -20 \quad \Rightarrow \quad 20 = -20$ — ложно $\Rightarrow$ $x_2 = 26$ — посторонний корень.

Абитуриент может привести другое решение задачи. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{cases}$$

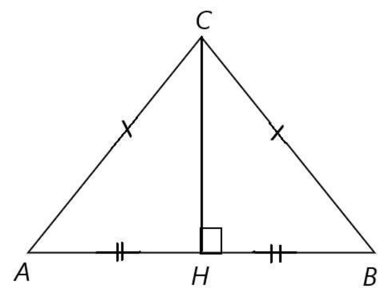
Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной $6 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$. *Если решение иррационального уравнения сведено к решению системы, то воспользуемся этим ограничением для отбора корней уравнения:* $x_2 = 26$ *— посторонний корень, так как не удовлетворяет ограничению на значения переменной* $x \leq 6$.

Ответ: $\boxed{2}$

3. В $\triangle ABC$ $AC = BC = 20$, $AB = 32$. Найдите $\sin A$.

Решение.

Обязательно сделайте чертеж! Чертеж выполняется ручкой. Разрешается пользоваться линейкой. Задача оценивается максимальным баллом, если правильно выполнен чертеж; приведены буквенные выражения искомых величин, и лишь затем подставлены их числовые значения; решение полное и обоснованное с ссылками на геометрические свойства, признаки подобия, теоремы (например, "по



теореме Пифагора") .

Опустим высоту CH на основание AB. Так как $\triangle ACB$ — равнобедренный, то CH — высота, медиана, биссектриса.

Следовательно, $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{32}{2} = 16$. Рассмотрим $\triangle ACH$. По теореме Пифагора

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{(20-16)\cdot(20+16)} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 36} = 2 \cdot 6 = 12.$$

Тогда $\sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\boxed{\frac{3}{5}}$

4. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin 126^\circ}{4 \cdot \sin 63^\circ \cdot \sin 27^\circ}$$

Решение. Используем формулу двойного угла $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ и формулу приведения $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

$$\frac{\sin 126^\circ}{4 \cdot \sin 63^\circ \cdot \sin 27^\circ} = \frac{2 \cdot \sin 63^\circ \cdot \cos 63^\circ}{4 \cdot \sin 63^\circ \cdot \sin 27^\circ} =$$

$$= \frac{\cos(90^\circ - 27^\circ)}{2 \cdot \sin 27^\circ} = \frac{\sin 27^\circ}{2 \cdot \sin 27^\circ} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\boxed{\frac{1}{2}}$

5. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $S_1(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$ и $S_2(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (S — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

Решение. Используем физический смысл производной. Так как

$$v_1(t) = S_1'(t) = \left(2t^3 - 5t^2 - 3t\right)' = 6t^2 - 10t - 3;$$

$$v_2(t) = S_2'(t) = \left(2t^3 - 3t^2 - 11t + 7\right)' = 6t^2 - 6t - 11.$$

Так как по условию $v_1(t) = v_2(t)$, то

$$6t^2 - 10t - 3 = 6t^2 - 6t - 11, \qquad 4t = 8, \qquad t = 2.$$

Тогда ускорения точек в момент времени $t = 2$

$$a_1(t) = v_1'(t) = \left(6t^2 - 10t - 3\right)' = 12t - 10, \qquad a_1(t = 2) = 12 \cdot 2 - 10 = 14;$$

$$a_2(t) = v_2'(t) = \left(6t^2 - 6t - 11\right)' = 12t - 6, \qquad a_2(t = 2) = 12 \cdot 2 - 6 = 18.$$

Ответ: $\boxed{14;\ 18}$

6. Два велосипедиста отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч — скорость второго велосипедиста. Составим таблицу по данным задачи:

	S	v	t
I	130 км	$(x+3)$ км/ч	$\frac{130}{x+3}$ ч
II	130 км	x км/ч	$\frac{130}{x}$ ч

Так как $t_2 - t_1 = 3$ ч, то составим уравнение:

$$\frac{130}{x} - \frac{130}{x+3} = 3,\ x > 0,$$

$$130\,(x+3-x) = 3x\,(x+3) \ \Rightarrow\ 130 = x^2 + 3x \ \Rightarrow\ x^2 + 3x - 130 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 \cdot x_2 = 130; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = -13, \\ x_2 = 10. \end{array}\right.$$

Корень уравнения $x_1 = -13$ — посторонний, так как $x > 0$ по условию задачи. Значит, скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, 10 км/ч.

Ответ: $\boxed{10}$

7. Решите неравенство $\quad 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-3} \leq \left(\frac{1}{64}\right)^{x}$

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Приведем обе части неравенства к одинаковому основанию $\frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-3} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}; \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-5} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}.$$

Так как основание показательной функции $0 < \frac{1}{4} < 1$, то показательная функция убывает, переходим к неравенству противоположного смысла: $x^2 - x - 5 \geq 3x, \quad x^2 - 4x - 5 \geq 0.$

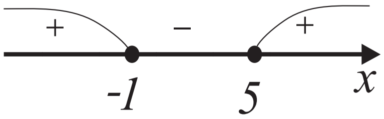
Решим неравенство методом интервалов. Рассмотрим функцию

$f(x) = x^2 - 4x - 5$. Найдем нули функции — критические точки.

$$x^2 - 4x - 5 = 0, \quad x_{1,\,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}.$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 5 \Rightarrow (x+1)(x-5) \geq 0$$

Критические точки разбивают числовую ось на три интервала. Отмечаем точки на числовой оси. Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале. Чередование знаков фиксируем на рисунке. Исследуем сами критические точки: неравенство нестрогое, точки входят во множество решений.

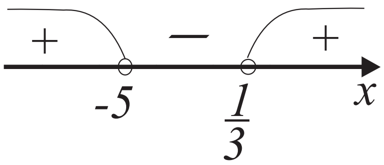


Тогда решение исходного неравенства: $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $\boxed{(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)}$

8. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1$

Решение. ОДЗ: $\frac{3x-1}{x+5} > 0$. Решим неравенство методом интервалов. Найдем критические точки: $x = 1/3$, $x = -5$. Критические точки разбивают числовую ось на три интервала. Отмечаем эти точки на числовой оси. Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале. Чередование знаков фиксируем на рисунке. Исследуем сами критические точки: так как неравенство строгое, точки не входят во множество решений.



Итак, ОДЗ: $x \in (-\infty; -5) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Перейдем к одинаковому основанию $\frac{1}{3}$.

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}.$$

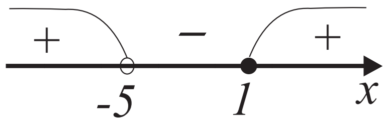
Так как основание логарифма $0 < \frac{1}{3} < 1$, то логарифмическая функция убывает. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства меняется на противоположный

$$\frac{3x-1}{x+5} \geq \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+5} - \frac{1}{3} \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{9x-3-x-5}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8x-8}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{x+5} \geq 0.$$

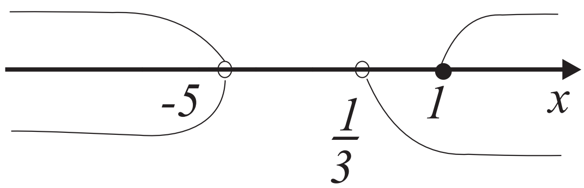
Решим неравенство методом интервалов.

Найдем критические точки: $x = 1$, $x = -5$. Отмечаем эти точки на числовой оси. Критические точки разбивают числовую ось на три интервала. Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале. Чередование знаков фиксируем на рисунке. Исследуем сами критические точки: точка $x = 1$ является нулем числителя и, так как неравенство нестрогое, входит в множество решений. Точка $x = -5$ не принадлежит множеству решений из-за того, что обращает в нуль знаменатель.



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$. Это решение неравенства.

Учитывая ОДЗ, получим



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$. Это пересечение множеств — решения неравенства и области допустимых значений — является решением исходного неравенства.

Ответ: $\boxed{(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)}$

9. Решите уравнение $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = \sqrt{3}\cos x + 1$.

Решение. Так как $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \sin\frac{\pi}{3}\right) =$
$= 2\left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$, то уравнение принимает вид

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x + \cos 2x = \sqrt{3}\cos x + 1.$$

Преобразуем уравнение $\sin x + \cos 2x = 1$. Воспользуемся формулой двойного угла:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Тогда уравнение примет вид

$$\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 1; \qquad 2\sin^2 x - \sin x = 0; \qquad \sin x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ 2\sin x - 1 = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Отсюда имеем совокупность решений

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, \quad n \in Z; \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z; \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\boxed{\pi n; \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad n, k, m \in Z}$.

Множество решений простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$ можно записать в виде $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$. Так же решение уравнения может быть записано только в градусах, например, $x = 30^\circ + 360^\circ k$, $k \in Z$. При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например, $x = 30^\circ + 2\pi k$ считается грубой ошибкой.