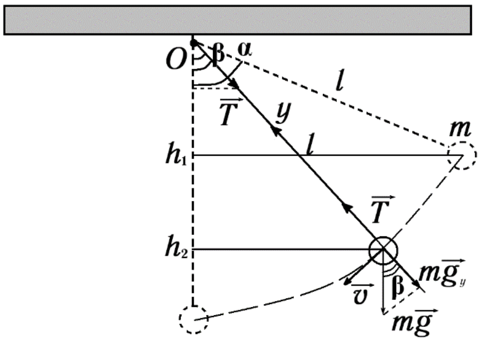
Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2021-2022
ФИЗИКА
11 класс
II этап
Вариант 1

1. К точке O прикреплён один конец нерастяжимой невесомой нити определённой длины. На другом конце нити находится маленький грузик массой $\boldsymbol{m}$. Нить с грузиком первоначально отводят от вертикали на угол $\boldsymbol{\alpha}$, а затем отпускают. Найдите зависимость силы натяжения от угла отклонения нити от вертикали в процессе движения грузика.

Оценка задания № 1 – 10 баллов

Решение:

Изобразим рисунок и расставим силы. Координатную ось y направим вдоль нити к точке O.



(2 балла)

1. В произвольный момент времени в процессе движения грузика, в системе отсчёта связанной с т. O, второй закон Ньютона в проекции на координатную ось y:

$$T - mg \cdot \cos\beta = ma_n = m\frac{v^2}{l},\ T = m\left(g \cdot \cos\beta + \frac{v^2}{l}\right). \qquad (1) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

2. Определим мгновенную скорость грузика из закона сохранения энергии в системе отсчёта, связанной с точкой O:

$$mgh_1 = mgh_2 + \frac{mv^2}{2}, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где $h_1 = l \cdot (1 - \cos\alpha)$, $h_2 = l \cdot (1 - \cos\beta)$, $h_1 - h_2 = l \cdot (\cos\beta - \cos\alpha)$.

$$v^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gl \cdot (\cos\beta - \cos\alpha),$$

$$\frac{v^2}{l} = 2g \cdot (\cos\beta - \cos\alpha). \qquad (2) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

3. Подставляя (2) в (1), получим

$$T(\beta) = m(g \cdot \cos\beta + 2g \cdot (\cos\beta - \cos\alpha)) = mg(3 \cdot \cos\beta - 2 \cdot \cos\alpha). \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Ответ: $T(\beta) = mg(3 \cdot \cos\beta - 2 \cdot \cos\alpha)$

2. Вентиляционная установка засасывает уличный воздух, пропуская его через фильтр тонкой очистки. Мощность прокачки воздуха составляет 120 м^3/ч. Считая, что в каждом килограмме атмосферного воздуха присутствует 41,5 мкг вредных примесей (угольной сажи), средний размер одной частицы угольной сажи равен 0,7 мкм, определите приблизительно (по порядку величины),

какое количество частиц будет улавливаться фильтром за 10 минут работы вентиляционной системы. Эффективность фильтрации этих примесей составляет 85%. Уличный воздух, для простоты, считать идеальным газом, находящемся при атмосферном давлении (Pa = 105 кПа) и при температуре 17 °С. Молярная масса воздуха равна 29 г/моль. Плотность частиц угольной сажи взять равной 1,5 г/см^3 . Для определённости, форму частиц при решении задачи считать кубической.

Оценка задания № 2 – 15 баллов

Решение:

1. Определим объём воздуха, прокачанного вентиляционной системой через фильтр за время t:

$$V_1 = N \cdot t\,, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где N – мощность прокачки воздуха.

2. Из уравнения Менделеева-Клапейрона найдем массу m_1 воздуха, прокачанного вентиляционной системой через фильтр за время t:

$$P_a V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT\,, \qquad m_1 = \frac{\mu P_a V_1}{RT} = \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT}\,. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

3. Определим массу m_2 угольной сажи, прокачанной вентиляционной системой через фильтр за время t:

$$m_2 = \eta_1 \cdot m_1 = \eta_1 \cdot \frac{\mu P_a V_1}{RT} = \eta_1 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT}\,, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где η_1 – массовая доля угольной сажи в воздухе.

4. Определим массу m_3 угольной сажи, которая осядет на фильтре за время t:

$$m_3 = \eta_2 \cdot m_2 = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\mu P_a V_1}{RT} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT} \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где η_2 – эффективность фильтрации воздуха.

5. Определим общий объём V_2 угольной сажи, которая бала задержана фильтром за время t:

$$V_2 = \frac{m_3}{\rho} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\mu P_a V_1}{\rho \cdot RT} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{\rho \cdot RT}\,, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где ρ – плотность частиц угольной сажи.

6. Определим объём V_0, который занимает одна частица угольной сажи:

$$V_0 = d^3 \text{ (для кубической формы),} \qquad \textbf{(1 балл)}$$

где d – линейный размер частицы.

7. Определим приблизительное количество частиц, поделив общий их объём на объём одной частицы:

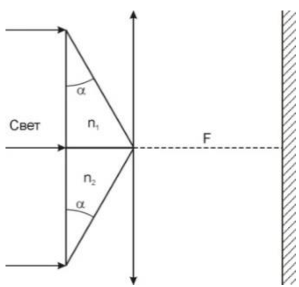
$$n = \frac{V_2}{V_0} \approx \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{\rho \cdot RT \cdot d^3}\,. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Проведём вычисления:

$$n \approx 41{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}85 \cdot \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 120 \cdot 1/6}{1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 8{,}31 \cdot 290 \cdot \left(7 \cdot 10^{-7}\right)^3} = 1{,}65 \cdot 10^9 \text{ штук}$$

С учетом того, что нас интересует только порядок величины, правильным ответом будем считать число частиц: $n \approx 10^9$ штук. **(2 балла)**

Ответ: $n \approx 10^9$ штук.



3. Две одинаковые стеклянные призмы с сечением в виде прямоугольного треугольника и углом α = 30° склеены малыми катетами, как показано на

рисунке. Серединой получившаяся система упирается в тонкую линзу с фокусным расстоянием 10 см. За ней на расстоянии, равном фокусному расстоянию линзы находится экран. Когда систему осветили параллельным пучком света, на экране появились три ярких точки, лежащие на одной прямой. Расстояние между крайними точками равно 10 см. Показатель преломления одной призмы n_1 = 1,5. Найти показатель преломления второй призмы.

Оценка задания № 3 – 15 баллов

Решение:

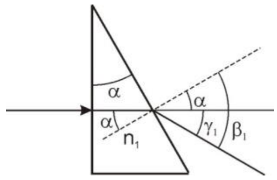


Рис. 1

Параллельные лучи света, проходящие через верхнюю призму, поворачиваются вниз на угол γ_1, который определяется следующим образом (см. рис. 1). **(1 балл)**

Через левую границу призмы свет проходит не преломляясь и падает на правую границу с углом падения α. Угол преломления β_1 на этой границе определяется по формуле

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}=\frac{1}{n_1}\Rightarrow \sin\beta_1=n_1\cdot\sin\alpha=1{,}5\cdot0{,}5=0{,}75\Rightarrow\beta_1=48{,}6^0$$ **(2 балла)**

Угол поворота лучей определяется так: $\gamma_1=\beta_1-\alpha=48{,}6^0-30^0=18{,}6^0$ **(1 балл)**

Повернувшиеся параллельные лучи, проходя через линзу, собираются в фокус, который находится на побочной оптической оси линзы, параллельной повернутым лучам, в фокальной плоскости линзы, т.е. на экране (см. рис. 2). **(3 балла)**

Это одно из крайних ярких пятен, указанных в условии задачи. Зная угол наклона побочной оптической оси γ_1 и расстояние от линзы до экрана F, можно определить расстояние от точки O на экране до фокуса верхней призмы A: $OA=F\cdot tg(\gamma_1)=10\cdot tg(18{,}6^0)=3{,}36$ см

(3 балла)

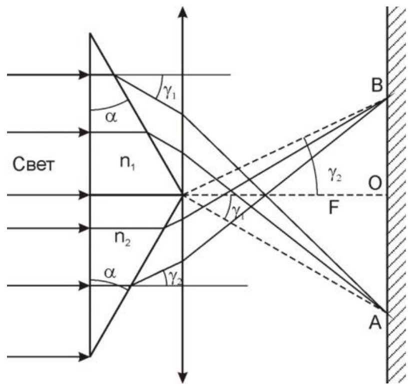


Рис. 2

Точно также получается на экране второе крайнее яркое пятно B – результат поворота лучей в нижней призме. Т.к. из условия задачи AB = 10 см, то OB = AB – OA = 6,64 см. Тогда

$$tg(\gamma_2)=\frac{OB}{F}=0{,}664\Rightarrow\gamma_2=33{,}6^0$$ **(3 балла)**

Аналогично верхней призме

$$\gamma_2=\beta_2-\alpha\Rightarrow\beta_2=\gamma_2+\alpha=33{,}6^0+30^0=63{,}6^0$$

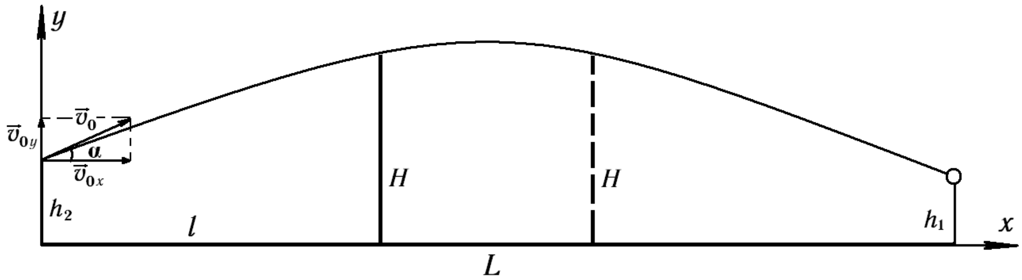
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2}=\frac{1}{n_2}\Rightarrow n_2=\frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha}=\frac{\sin63{,}6^0}{\sin30^0}=1{,}8$$ **(2 балла)**

Ответ: показатель преломления второй призмы 1,8

4. Лучнику на соревнованиях необходимо поразить центр мишени, находящейся от него на расстоянии L = 50 м на высоте h_1 = 1,5 м над землёй. Между лучником и мишенью находится прозрачная широкая преграда (стенка, забор) высотой H = 3 м, толщиной которой можно пренебречь. Лучник пускает стрелу с высоты h_2 = 1,6 м под углом α = 12° к горизонту. Определите, с точностью до десятых долей, минимальное расстояние между лучником и преградой, при которой мишень может быть поражена. Ветра нет, сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

Оценка задания № 4 – 30 баллов

Решение:



(2 балла)

1. Изменение координаты *y* за время *t* полёта стрелы:

$$h_1 = h_2 + v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \text{ где } v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha. \quad (1) \qquad \textbf{(4 балла)}$$

2. Изменение координаты *x* за время *t* полёта стрелы:

$$L = v_{0x} \cdot t, \text{ где } v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha. \quad (2) \qquad \textbf{(4 балла)}$$

3. Найдем скорость v_0, с которой была выпущена стрела. Для этого выразим из (2) время полёта стрелы и подставим в (1):

$$t = \frac{L}{v_0 \cdot \cos\alpha}. \quad (3)$$

$$h_1 = h_2 + \frac{v_0 \cdot \sin\alpha \cdot L}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{gL^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha},$$

$$h_1 = h_2 + L \cdot tg\alpha - \frac{gL^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha},$$

$$\frac{gL^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = L \cdot tg\alpha - (h_1 - h_2),$$

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot [L \cdot tg\alpha + (h_2 - h_1)]},$$

$$v_0 = \frac{L}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot [L \cdot tg\alpha + (h_2 - h_1)]}}. \quad (4) \qquad \textbf{(6 баллов)}$$

4. Определим приблизительные значение начальной скорости и полного времени полёта стрелы до мишени, подставив числовые значения в (4) и (3):

v_0 =34,8975 м/с ≈ 34,9 м/с, t = 1,46477 с ≈ 1,465 с.

5. Найдём моменты времени, в которые стрела окажется на высоте преграды *H*:

$$H = h_2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_H - \frac{gt_H^2}{2}, \quad (5) \qquad \textbf{(4 балла)}$$

$$H = h_2 + \frac{L \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot [L \cdot tg\alpha + (h_2 - h_1)]}} \cdot t_H - \frac{gt_H^2}{2},$$

$$\frac{gt_H^2}{2} - L \cdot tg\alpha \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot [L \cdot tg\alpha + (h_2 - h_1)]}} \cdot t_H + (H - h_2) = 0. \quad (6) \qquad \textbf{(4 балла)}$$

6. Решая, квадратное уравнение (любой способ), находим два корня, первый из которых t_{H1} = 0,230 с =0,23 с соответствует минимальному расстоянию между лучником и преградой, при котором стрела перелетит через нее не воткнувшись:

$l_{\min} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_{H1}$ =7,851 м ≈ 7,9 м (при 7,8 м стрела уже воткнётся в преграду),

(6 баллов)

*Примечание: Т.к. расчёты могут быть различной точности, то считать правильными ответы с погрешностью 0,1 м от указанных значений.

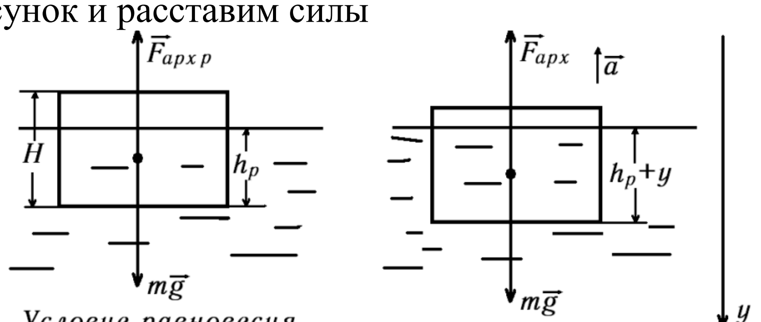
Ответ: расстояние должно быть не менее 7,85 м ≈ 7,9 м (при 7,8 м стрела уже воткнётся в преграду)

5. Две цилиндрических шайбы одинаковой массы изготовлены из материалов с плотностями $\boldsymbol{\rho_1}$ и $\boldsymbol{\rho_2}$. Радиусы оснований цилиндров соответственно равны $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$. Шайбы изначально погружают в воду так, что верхнее основание цилиндра находится на одном уровне с поверхностью воды, а затем отпускают. Плотности материалов, из которых изготовлены шайбы, меньше плотности воды $\boldsymbol{\rho}$. Определите отношение полных энергий малых вертикальных колебаний шайб. Шайбы колеблются независимо.

Оценка задания № 5 – 30 баллов

Решение:

Изобразим рисунок и расставим силы



Условие равновесия

Тело погружено на глубину "y" по сравнению с равновесным положением

(2 балла)

1. В равновесном положении, второй закон Ньютона для первой шайбы в проекции на вертикальное направление:

$$F_{арх.р1} - m_1 g = \rho g s_1 \cdot h_{р1} - \rho_1 g s_1 H_1 = 0, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где $s = \pi \cdot R^2$ – площадь основания цилиндра.

Из (1) получим $\rho \cdot h_{р1} = \rho_1 H_1$, $\quad h_{р1} = \dfrac{\rho_1 H_1}{\rho}$. (2) **(2 балла)**

2. В произвольный момент времени в процессе движения шайбы второй закон Ньютона в проекции на координатную ось y:

$$m_1 g - F_{àðõ1} = m_1 a_1, \quad \rho_1 g s_1 H_1 - \rho g s_1 h_1 = -\rho_1 s_1 H_1 \cdot a_1, \qquad (3) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где $h_1 = h_{ð1} + y_1$ (y_1 – смещение первого тела от положения равновесия в произвольный момент времени), а ускорение всегда направлено в противоположную сторону смещению и определяется $a_1 = -y_1'' = -\ddot{y}_1$. **(2 балла)**

В итоге, (3), сократив площадь основания шайб, можно записать как

$$\rho_1 g H_1 - \rho g h_{р1} - \rho g y_1 = \rho_1 H_1 \cdot \ddot{y}_1.$$

Первые два слагаемых в последнем уравнении согласно условию (1) дают «0». Перенеся все слагаемые в одну сторону равенства, получим:

$$\rho_1 H_1 \cdot \ddot{y}_1 + \rho g y_1 = 0, \qquad \ddot{y}_1 + \frac{\rho g}{\rho_1 H_1} y_1 = 0. \qquad (4) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

4. Сравнивая (4) с дифференциальным уравнением гармонических колебаний:

$$\ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = 0,$$

Получаем выражение для частоты малых гармонических колебаний первой шайбы:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_1 H_1}}. \qquad (5) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

5. Проделав аналогичные операции (1) – (4), получаем выражение для частоты малых гармонических колебаний второй шайбы:

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_2 H_2}}. \qquad (5') \qquad \textbf{(2 балла)}$$

6. Найдём любым способом полную механическую энергию малых гармонических колебаний шайб:

1 способ: Механическая энергия вертикальных колебаний под действием квазиупругих сил, может быть найдена как максимальная потенциальная энергия колебаний пружинного маятника с амплитудой колебаний A:

$$W = \frac{k \cdot A^2}{2}. \qquad (6) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Эквивалентный коэффициент упругости найдём из уравнения для частоты колебаний пружинного маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad k = m \cdot \omega_0^2. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

2 способ: Механическая энергия малых гармонических колебаний с амплитудой A, равна:

$$W = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2}. \qquad (6') \qquad \textbf{(4 балла)}$$

(*Далее решение общее). С учётом (5) и (5'):

$$m_1 \cdot \omega_{01}^2 = \rho_1 s_1 H_1 \cdot \frac{\rho g}{\rho_1 H_1} = \rho g \pi \cdot R_1^2, \quad m_2 \cdot \omega_{02}^2 = \rho g \pi \cdot R_2^2. \qquad (7) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Найдём амплитуды колебаний первой и второй шайб. Максимальное смещение от положения равновесия в начальный момент времени равно:

$$A_1 = H_1 - h_{p1} = H_1\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right), \; A_2 = H_2 - h_{p2} = H_2\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho}\right). \qquad (8) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Здесь учтено равенство (2) для положения равновесия.

7. Подставляя (7) и (8) в (6'), получим

$$W_1 = \frac{\rho g \pi \cdot R_1^2 \cdot H_1^2 \cdot (\rho - \rho_1)^2}{2\rho^2} = \frac{g\pi}{2\rho} \cdot R_1^2 \cdot H_1^2 \cdot (\rho - \rho_1)^2,$$

$$W_2 = \frac{g\pi}{2\rho} \cdot R_2^2 \cdot H_2^2 \cdot (\rho - \rho_2)^2. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

8. С учётом условия, что массы шайб одинаковы:

$$m_1 = \rho_1 \pi \cdot R_1^2 \cdot H_1 = \rho_2 \pi \cdot R_2^2 \cdot H_2 = m_2,$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

9. В итоге, искомое отношение энергий

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{H_2^2}{H_1^2} \cdot \frac{(\rho - \rho_2)^2}{(\rho - \rho_1)^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \cdot \frac{R_1^4}{R_2^4} \cdot \frac{(\rho - \rho_2)^2}{(\rho - \rho_1)^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \cdot \frac{(\rho - \rho_2)^2}{(\rho - \rho_1)^2}.$$

Или

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{\left(\rho/\rho_2 - 1\right)^2}{\left(\rho/\rho_1 - 1\right)^2}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Ответ: $\boxed{\dfrac{W_2}{W_1}=\dfrac{R_1^2}{R_2^2}\cdot\dfrac{\left(\rho/\rho_2-1\right)^2}{\left(\rho/\rho_1-1\right)^2}}$ или $\boxed{\dfrac{W_2}{W_1}=\dfrac{R_1^2}{R_2^2}\cdot\dfrac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\cdot\dfrac{(\rho-\rho_2)^2}{(\rho-\rho_1)^2}}$

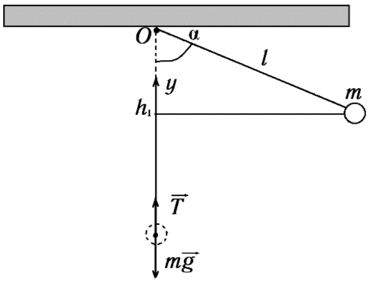
Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2021-2022
ФИЗИКА
11 класс
II этап
Вариант 2

1. К точке O прикреплён один конец нерастяжимой невесомой нити определённой длины. На другом конце нити находится маленький грузик массой $\boldsymbol{m}$. Нить с грузиком первоначально отводят от вертикали на угол некоторый угол $\boldsymbol{\alpha}$, а затем отпускают. Определите значение угла α, если при прохождении положения равновесия грузиком сила натяжения нити равна $\boldsymbol{T}$.

Оценка задания № 1 – 10 баллов

Решение:

Изобразим рисунок и расставим силы. Координатную ось у направим вдоль нити к точке O.



(2 балла)

1. В произвольный момент времени в процессе движения грузика, в системе отсчёта связанной с т. O, второй закон Ньютона в проекции на координатную ось y:

$$T - mg\cdot\cos\beta = ma_n = m\frac{v^2}{l}, \qquad T = m\left(g\cdot\cos\beta + \frac{v^2}{l}\right).$$

При прохождении грузиком положения равновесия $\beta = 0$.

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right). \qquad (1)$$ **(2 балла)**

2. Определим мгновенную скорость грузика в положении равновесия из закона сохранения энергии в системе отсчёта, связанной с точкой O:

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2},$$ **(2 балла)**

где $h_1 = l\cdot(1-\cos\alpha)$.

$$v^2 = 2gh_1 = 2gl(1-\cos\alpha), \qquad \frac{v^2}{l} = 2g(1-\cos\alpha). \qquad (2)$$ **(2 балла)**

3. Подставляя (2) в (1), получим

$$T = mg(1+2(1-\cos\alpha)) = mg(3-2\cos\alpha), \qquad \cos\alpha = \frac{3}{2} - \frac{T}{2mg} = \frac{3mg-T}{2mg},$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3mg-T}{2mg}\right).$$ **(2 балла)**

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\frac{3mg-T}{2mg}\right)$

2. Вентиляционная установка засасывает уличный воздух, пропуская его через систему из трёх фильтров тонкой очистки. Мощность прокачки воздуха составляет 120 м^3 /ч. В каждом килограмме атмосферного воздуха присутствует 41,5 мкг вредных примесей (угольной сажи). Эффективность фильтрации этих примесей каждым из фильтров составляет 85%. В систему вентиляции встроен датчик суммарной массы трёх фильтров. Когда масса системы фильтров увеличивается на 20 грамм, срабатывает сигнализация о необходимости замены системы фильтров. Определите среднее (в часах или в сутках) время эксплуатации вентиляционной установки между заменами фильтров. Уличный воздух, для простоты, считать идеальным газом, находящемся при атмосферном давлении (Pa = 105 кПа) и при температуре 17 °С. Молярная масса воздуха равна 29 г/моль.

Решение:

1. Определим объём воздуха, прокачанного вентиляционной системой через фильтр за время *t*:

$$V_в = N \cdot t\,, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где *N* – мощность прокачки воздуха.

2. Из уравнения Менделеева-Клапейрона найдем массу $m_в$ воздуха, прокачанного вентиляционной системой через фильтр за время *t*:

$$P_a V_в = \frac{m_в}{\mu} RT\,, \qquad m_в = \frac{\mu P_a V_в}{RT} = \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

3. Определим массу *m* угольной сажи, прокачанной вентиляционной системой через первый фильтр за время *t*:

$$m = \eta_1 \cdot m_в = \eta_1 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT}, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где η_1 – массовая доля угольной сажи в воздухе.

4. Определим массу m_1 угольной сажи, которая осядет на первом фильтре за время *t*:

$$m_1 = \eta_2 \cdot m = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT}, \qquad \textbf{(1 балл)}$$

где η_2 – эффективность фильтрации воздуха.

5. Определим массу m_2 угольной сажи, которая осядет на втором фильтре за время *t*:

$$m_2 = \eta_2 \cdot (1-\eta_2) \cdot m = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot (1-\eta_2) \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT}, \qquad \textbf{(1 балл)}$$

где $(1 - \eta_2)$ – доля частиц угольной сажи, прошедших через первый фильтр.

6. Определим массу m_3 угольной сажи, которая осядет на третьем фильтре за время *t*:

$$m_3 = \eta_2 \cdot (1-\eta_2)^2 \cdot m = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot (1-\eta_2)^2 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT}, \qquad \textbf{(1 балл)}$$

где $(1 - \eta_2)^2$ – доля частиц угольной сажи, прошедших через второй фильтр.

7. Увеличение массы всех трёх фильтров за время *t* равно массе угольной сажи, которая осела на фильтрах:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT} \cdot \left(1 + (1-\eta_2) + (1-\eta_2)^2\right) = \\ = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \frac{\mu P_a \cdot N \cdot t}{RT} \cdot \left(3 - 3\eta_2 + \eta_2^2\right). \qquad \textbf{(2 балла)}$$

8. Выразим время *t*:

$$t = \frac{M \cdot R \cdot T}{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \mu \cdot P_a \cdot N \cdot \left(3 - 3\eta_2 + \eta_2^2\right)}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

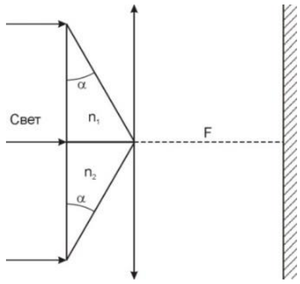
Проведём вычисления:

$$t=\frac{0{,}02\cdot 8{,}31\cdot 290}{41{,}5\cdot 10^{-9}\cdot 0{,}85\cdot 29\cdot 10^{-3}\cdot 10^{5}\cdot 120\cdot\left(3-3\cdot 0{,}85+0{,}7225\right)}\approx 3348{,}65 \text{ часов} \approx$$

$\approx 139{,}53$ суток $\approx 4{,}65$ месяцев **(2 балла)**

Ответ: 3348,65 часов или 139,53 суток.

3. Две одинаковые стеклянные призмы с сечением в виде прямоугольного треугольника и углом α = 30° склеены малыми катетами, как показано на рисунке. Серединой получившаяся система упирается в тонкую линзу. За ней на расстоянии, равном фокусному расстоянию линзы находится экран. Когда систему осветили параллельным пучком света, на экране появились три ярких точки, лежащие на одной прямой. Расстояние между крайними точками равно 10 см. Показатели преломления призм n_1 = 1,5, n_2 = 1,8. Найти фокусное расстояние линзы.



Оценка заданий №№ 2-3 – по 15 баллов

Решение:

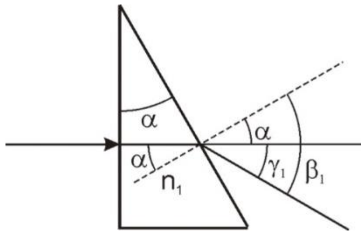


Рис. 1

Параллельные лучи света, проходящие через верхнюю призму, поворачиваются вниз на угол γ_1, который определяется следующим образом (см. рис. 1). **(1 балл)**

Через левую границу призмы свет проходит не преломляясь и падает на правую границу с углом падения α. Угол преломления β_1 на этой границе определяется по формуле

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}=\frac{1}{n_1}\Rightarrow \sin\beta_1=n_1\cdot\sin\alpha=1{,}5\cdot 0{,}5=0{,}75\Rightarrow\beta_1=48{,}6^0$$ **(2 балла)**

Угол поворота лучей определяется так: $\gamma_1=\beta_1-\alpha=48{,}6^0-30^0=18{,}6^0$ **(1 балл)**

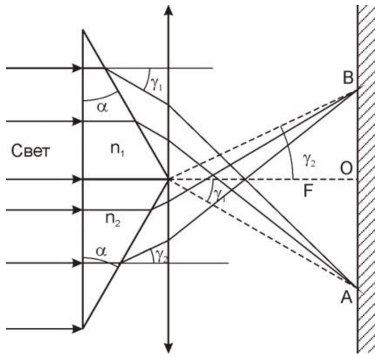


Рис. 2

Повернувшиеся параллельные лучи, проходя через линзу, собираются в фокус, который находится на побочной оптической оси линзы, параллельной повернутым лучам, в фокальной плоскости линзы, т.е. на экране (см. рис. 2). **(3 балла)**

Это одно из крайних ярких пятен, указанных в условии задачи. Зная угол наклона побочной оптической оси γ_1 и расстояние от линзы до экрана F, можно определить расстояние от точки O на экране до фокуса верхней призмы A: $OA=F\cdot tg\left(\gamma_1\right)=F\cdot tg\left(18{,}6^0\right)$ **(3 балла)**

Точно также получается на экране второе крайнее яркое пятно B – результат поворота лучей в нижней призме.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2}=\frac{1}{n_2}\Rightarrow \sin\beta_2=n_2\cdot\sin\alpha=1{,}8\cdot 0{,}5=0{,}9\Rightarrow\beta_2=64{,}15^0$$ **(1 балл)**

Угол поворота лучей определяется так: $\gamma_2=\beta_2-\alpha=64{,}15^0-30^0=34{,}15^0$ **(1 балл)**

Расстояние от точки О на экране до фокуса нижней призмы В: $OB = F \cdot tg(\gamma_2) = F \cdot tg(34{,}15^0)$ **(1 балл)**

По условию задачи АВ = 10 см, поэтому $AB = 10 = F \cdot tg(\gamma_1) + F \cdot tg(\gamma_2) = F \cdot \left(tg(18{,}6^0) + tg(34{,}15^0)\right) = F \cdot 1{,}015$ **(1 балл)**

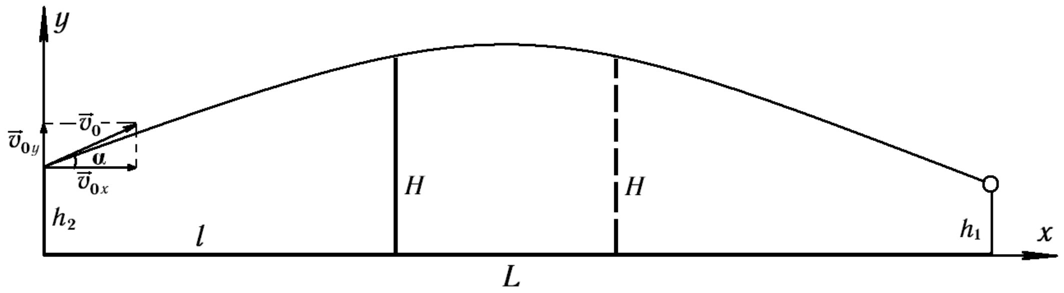
Отсюда $F = \dfrac{10}{1{,}015} = 9{,}85$ см **(1 балл)**

Ответ: фокусное расстояние линзы 9,85 см

4. Лучнику на соревнованиях необходимо поразить центр мишени, находящейся от него на расстоянии ***L*** = 50 м на высоте ***h₁*** = 1,5 м над землёй. Между лучником и мишенью находится прозрачная широкая преграда (стенка, забор) высотой ***H*** = 3 м, толщиной которой можно пренебречь. Лучник пускает стрелу с высоты ***h₂*** = 1,6 м под углом ***α*** = 12° к горизонту. Сможет ли лучник поразить мишень, если расстояние между ним и преградой будет составлять ***l*** = 8 метров? Ветра нет, сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 .

Оценка задания № 4 – 30 баллов

Решение:



(2 балла)

1. Изменение координаты *y* за время *t* полёта стрелы:

$$h_1 = h_2 + v_{0y} \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \text{ где } v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha. \quad (1)$$ **(4 балла)**

2. Изменение координаты *x* за время *t* полёта стрелы:

$$L = v_{0x} \cdot t, \text{ где } v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha. \quad (2)$$ **(4 балла)**

3. Найдем скорость v_0, с которой была выпущена стрела. Для этого выразим из (2) время полёта стрелы и подставим в (1):

$$t = \frac{L}{v_0 \cdot \cos\alpha}. \quad (3)$$

$$h_1 = h_2 + \frac{v_0 \cdot \sin\alpha \cdot L}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{gL^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha},$$

$$h_1 = h_2 + L \cdot tg\alpha - \frac{gL^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha},$$

$$\frac{gL^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = L \cdot tg\alpha - (h_1 - h_2),$$

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot [L \cdot tg\alpha + (h_2 - h_1)]},$$

$$v_0 = \frac{L}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot \left[L \cdot tg\alpha + (h_2 - h_1)\right]}}. \qquad (4) \qquad \textbf{(6 баллов)}$$

4. Определим приблизительные значение начальной скорости и полного времени полёта стрелы до мишени, подставив числовые значения в (4) и (3):

v_0 =34,8975 м/с ≈ 34,9 м/с, t = 1,46477 с ≈ 1,465 с.

5. Найдём моменты времени, в которые стрела окажется на высоте преграды H:

$$H = h_2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_H - \frac{g t_H^2}{2}, \qquad (5) \qquad \textbf{(4 балла)}$$

$$H = h_2 + \frac{L \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot \left[L \cdot tg\alpha + (h_2 - h_1)\right]}} \cdot t_H - \frac{g t_H^2}{2},$$

$$\frac{g t_H^2}{2} - L \cdot tg\alpha \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot \left[L \cdot tg\alpha + (h_2 - h_1)\right]}} \cdot t_H + (H - h_2) = 0. \qquad (6) \qquad \textbf{(4 балла)}$$

6. Решая, квадратное уравнение (любой способ), находим два корня, первый из которых t_{H1} = 0,230 с =0,23 с соответствует минимальному расстоянию между лучником и преградой, при котором стрела перелетит через нее не воткнувшись:

$l_{\min} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_{H1}$=7,851 м ≈ 7,9 м (при 7,8 м стрела уже воткнётся в преграду),

(6 баллов)

*Примечание: Т.к. расчёты могут быть различной точности, то считать правильными ответы с погрешностью 0,1 м от указанных значений.

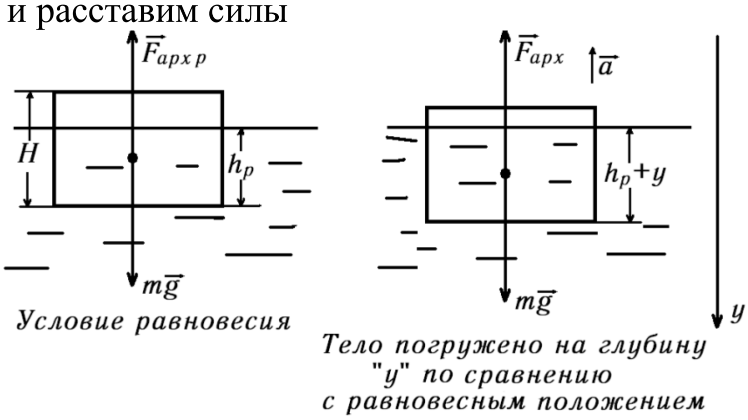
Ответ: Да, сможет, т.к. 8 м > 7,9 м.

5. Две цилиндрических шайбы одинаковой массы изготовлены из материалов с плотностями $\boldsymbol{\rho_1}$ и $\boldsymbol{\rho_2}$. Шайбы изначально погружают в воду так, что верхнее основание цилиндра находится на одном уровне с поверхностью воды, а затем отпускают. Плотности материалов, из которых изготовлены шайбы, меньше плотности воды $\boldsymbol{\rho}$. Определите, во сколько раз отличаются радиусы оснований цилиндров, если отношение полных энергий малых вертикальных колебаний шайб равно $\boldsymbol{W_2/W_1 = \eta}$. Шайбы колеблются независимо.

Оценка задания № 4-5 – 30 баллов

Решение:

Изобразим рисунок и расставим силы



(2 балла)

1. В равновесном положении, второй закон Ньютона для первой шайбы в проекции на вертикальное направление:

$$F_{арх.р1} - m_1 g = \rho g s_1 \cdot h_{р1} - \rho_1 g s_1 H_1 = 0, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где $s = \pi \cdot R^2$ – площадь основания цилиндра.

Из (1) получим $\rho \cdot h_{p1} = \rho_1 H_1$, $h_{p1} = \dfrac{\rho_1 H_1}{\rho}$. (2) **(2 балла)**

2. В произвольный момент времени в процессе движения шайбы второй закон Ньютона в проекции на координатную ось y:

$$m_1 g - F_{apx1} = m_1 a_1, \quad \rho_1 g s_1 H_1 - \rho g s_1 h_1 = -\rho_1 s_1 H_1 \cdot a_1, \quad (3)$$ **(2 балла)**

где $h_1 = h_{p1} + y_1$ (y_1 – смещение первого тела от положения равновесия в произвольный момент времени), а ускорение всегда направлено в противоположную сторону смещению и определяется $a_1 = -y_1'' = -\ddot{y}_1$. **(2 балла)**

В итоге, (3), сократив площадь основания шайб, можно записать как

$$\rho_1 g H_1 - \rho g h_{p1} - \rho g y_1 = \rho_1 H_1 \cdot \ddot{y}_1.$$

Первые два слагаемых в последнем уравнении согласно условию (1) дают «0». Перенеся все слагаемые в одну сторону равенства, получим:

$$\rho_1 H_1 \cdot \ddot{y}_1 + \rho g y_1 = 0, \qquad \ddot{y}_1 + \frac{\rho g}{\rho_1 H_1} y_1 = 0. \quad (4)$$ **(2 балла)**

4. Сравнивая (4) с дифференциальным уравнением гармонических колебаний:

$$\ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = 0,$$

Получаем выражение для частоты малых гармонических колебаний первой шайбы:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_1 H_1}}. \quad (5)$$ **(2 балла)**

5. Проделав аналогичные операции (1) – (4), получаем выражение для частоты малых гармонических колебаний второй шайбы:

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_2 H_2}}. \quad (5')$$ **(2 балла)**

6. Найдём любым способом полную механическую энергию малых гармонических колебаний шайб:

<u>1 способ</u>: Механическая энергия вертикальных колебаний под действием квазиупругих сил, может быть найдена как максимальная потенциальная энергия колебаний пружинного маятника с амплитудой колебаний A:

$$W = \frac{k \cdot A^2}{2}. \quad (6)$$ **(2 балла)**

Эквивалентный коэффициент упругости найдём из уравнения для частоты колебаний пружинного маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad k = m \cdot \omega_0^2.$$ **(2 балла)**

<u>2 способ:</u> Механическая энергия малых гармонических колебаний с амплитудой A, равна:

$$W = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2}{2}. \quad (6')$$ **(4 балла)**

(*Далее решение общее). С учётом (5) и (5'):

$$m_1 \cdot \omega_{01}^2 = \rho_1 s_1 H_1 \cdot \frac{\rho g}{\rho_1 H_1} = \rho g \pi \cdot R_1^2, \quad m_2 \cdot \omega_{02}^2 = \rho g \pi \cdot R_2^2. \quad (7)$$ **(2 балла)**

Найдём амплитуды колебаний первой и второй шайб. Максимальное смещение от положения равновесия в начальный момент времени равно:

$$A_1 = H_1 - h_{p1} = H_1\left(1-\frac{\rho_1}{\rho}\right),\ A_2 = H_2 - h_{p2} = H_2\left(1-\frac{\rho_2}{\rho}\right). \qquad (8) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Здесь учтено равенство (2) для положения равновесия.

7. Подставляя (7) и (8) в (6'), получим

$$W_1 = \frac{\rho g\pi \cdot R_1^2 \cdot H_1^2 \cdot (\rho-\rho_1)^2}{2\rho^2} = \frac{g\pi}{2\rho} \cdot R_1^2 \cdot H_1^2 \cdot (\rho-\rho_1)^2,$$

$$W_2 = \frac{g\pi}{2\rho} \cdot R_2^2 \cdot H_2^2 \cdot (\rho-\rho_2)^2. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

8. С учётом условия, что массы шайб одинаковы:

$$m_1 = \rho_1\pi \cdot R_1^2 \cdot H_1 = \rho_2\pi \cdot R_2^2 \cdot H_2 = m_2,$$

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

9. Запишем выражение для отношения энергий, и выразим из него отношение радиусов оснований цилиндров:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{H_2^2}{H_1^2} \cdot \frac{(\rho-\rho_2)^2}{(\rho-\rho_1)^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \cdot \frac{R_1^4}{R_2^4} \cdot \frac{(\rho-\rho_2)^2}{(\rho-\rho_1)^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \cdot \frac{(\rho-\rho_2)^2}{(\rho-\rho_1)^2} = \eta.$$

Откуда, $$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\eta} \cdot \frac{\rho_2 \cdot (\rho-\rho_1)}{\rho_1 \cdot (\rho-\rho_2)} = \sqrt{\eta} \cdot \frac{\left(\rho/\rho_1 - 1\right)}{\left(\rho/\rho_2 - 1\right)}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Ответ: $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\eta} \cdot \frac{\rho_2 \cdot (\rho-\rho_1)}{\rho_1 \cdot (\rho-\rho_2)}$ или $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\eta} \cdot \frac{\left(\rho/\rho_1 - 1\right)}{\left(\rho/\rho_2 - 1\right)}$