Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 2

1. Вычислите $2023!\cdot(S_{2022}-1)$, если $S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}$.

Ответ: -1.

Решение.

Учитывая, что $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$, получим

$S_{2022}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{2022}{2023!}=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2022!}-\frac{1}{2023!}\right)=1-\frac{1}{2023!}$.

Тогда $2023!\cdot(S_{2022}-1)=2023!\cdot\left(1-\frac{1}{2023!}-1\right)=-1.$

2. Для каждого значения параметра k решите уравнение

$$2+\cos^2x+\cos 4x+\cos 2x+2\sin 3x\cdot\ \sin 7x+\sin^2 7x=\cos^2\left(\frac{\pi k}{2022}\right).$$

Ответ: При $k=2022\cdot m,\ m\in Z\quad x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \ n\in Z;$

при других значениях параметра k решений нет.

Решение.

Исходное уравнение равносильно следующему уравнению:

$$(\sin 3x+\sin 7x)^2+(\cos 3x+\cos x)^2+\sin^2\left(\frac{\pi k}{2022}\right)=0.$$

$$\begin{cases}\sin 3x+\sin 7x=0,\\ \cos 3x+\cos x=0,\\ \sin\left(\frac{\pi k}{2022}\right)=0.\end{cases}$$

Если $k=2022\cdot m, m\in Z$, то решая первое и второе уравнение системы, получим

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \ n\in Z.$$

При других значениях параметра k решений нет.

3. Пусть $p(x)=x^2+3x+2$. Вычислите произведение

$$\left(1-\frac{2}{p(1)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(2)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(3)}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p(2022)}\right).$$

Ответ: $\frac{675}{2023}$.

Решение.

Рассмотрим n –й множитель в данном произведении

$$1-\frac{2}{p(n)}=\frac{p(n)-2}{p(n)}=\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Вычислим

$$\left(1-\frac{2}{p(1)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(2)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(3)}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p(2022)}\right)=\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\cdots\frac{2022\cdot2025}{2023\cdot2024}=\frac{1\cdot2025}{3\cdot2023}=\frac{675}{2023}.$$

4. Найдите значение выражения $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$, если относительно $a,\ b,\ c$ известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям $a^3-2020a^2+1010=0,\ \ b^3-2020b^2+1010=0,\ \ c^3-2020c^2+1010=0.$

Ответ: $-\mathbf{2}$.

Решение.

Кубическое уравнение $t^3-2020t^2+1010=0$ имеет три различных корня (так как для $f(t)=t^3-2020t^2+1010:\ f(-3000)<0, f(0)>0, f(10)<0, f(3000)>0)$.

Пусть эти корни и будут a,b,c. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases}a+b+c=2020,\\ ab+bc+ac=0,\\ abc=-1010.\end{cases}$$

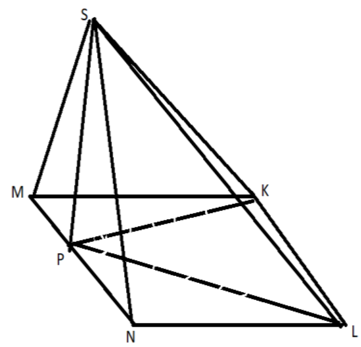
Найдем значение выражения : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{c+a+b}{abc}=\frac{2020}{-1010}=-2.$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SMNKL$ лежит ромб $MNKL$ со стороной 4 и острым углом NMK в $60°$. Известно, что $SM=2,\ SN=4$. Определите при каких значениях длин оставшихся двух ребер SK и SL объем пирамиды достигает наибольшей величины, и вычислите этот объем.

Ответ: $V_{max}=4\sqrt{5}$, $SK=3\sqrt{2}, SL=\sqrt{46}.$

Решение.

Опустим из точки S перпендикуляры SP на ребро MN и SH на плоскость основания $MNKL$.



Все стороны треугольника SMN известны, поэтому длина SP определяется однозначно, основание пирамиды фиксировано, поэтому объем достигает наибольшего значения, если максимальна высота SH пирамиды.

Значит, SP и SH должны совпадать, и следовательно, грани SMN и $MNKL$ перпендикулярны.

Треугольник SMN равнобедренный, так как $SN=4, MN=4$.

После элементарных вычислений получаем $SP=\frac{\sqrt{15}}{2}, MP=\frac{1}{2}, NP=\frac{7}{2}.$

Из треугольника MPK найдем $PK^2=MK^2+MP^2-2MK\cdot MP\cdot\cos60°\Rightarrow\ \ PK^2=\frac{57}{4}.$

Из прямоугольного треугольника SPK находим $SK^2 = SP^2 + PK^2 \Rightarrow \; SK^2 = 18 \Rightarrow$ $SK = 3\sqrt{2}$.

Из треугольника PNL найдем $PL^2 = NL^2 + PN^2 - 2NL \cdot PL \cdot \cos 120° \Rightarrow \; PL^2 = \frac{169}{4}$.

Из прямоугольного треугольника SPL находим $SL^2 = SP^2 + PL^2 \Rightarrow \; SL^2 = 46 \Rightarrow$ $SK = \sqrt{46}$.

$$V_{max} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNKL} \cdot SP = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} = 4\sqrt{5}.$$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.