

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Совет ректоров вузов Томской области**  
**Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022**  
**МАТЕМАТИКА (10 класс)**  
**Заключительный этап**  
**Вариант 2**

1. Решите уравнение в целых числах

$$2025^x - 100xy + 3 - y^2 = 0.$$

**Ответ:** (0; 2), (0; -2).

**Решение.**

Рассматриваем  $x, y \in Z$ .

$$2025^x - 100xy + 3 = y^2.$$

1)  $x = 0 \Rightarrow 2025^0 - 0 + 3 = y^2 \Rightarrow 4 = y^2 \Rightarrow y = \pm 2$ .

2)  $x < 0 \Rightarrow 2025^x - 100xy + 3 = y^2 \Rightarrow$  нет решений, так как число в левой части – не целое, а в правой – целое.

3)  $x > 0 \Rightarrow 2025^x - 100xy + 3 = y^2 \Rightarrow$  нет решений, так как число в левой части оканчивается на цифру 8, а в правой части – точный квадрат.

2. Про квадратный трехчлен  $p(x) = (a-1)x^2 - (a-1)x + 2022$  известно, что  $-2022 \leq p(x) \leq 2022$  при  $x \in [0; 1]$ . Найдите наибольшее возможное значение  $a$ .

**Ответ:** 16177.

**Решение.** Так как  $p(0) = p(1) = 2022$ , то графиком квадратного трехчлена является парабола, симметричная относительно прямой  $x = \frac{1}{2}$ . Из условий, что  $-2022 \leq p(x) \leq 2022$  при  $x \in [0; 1]$  и  $p(0) = p(1) = 2022$  следует, что ветви параболы направлены вверх. Тогда наименьшее значение  $p(x)$  равно  $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2022 - \frac{(a-1)}{4}$ .

Наибольшее возможное значение  $a$  будет достигаться при  $p\left(\frac{1}{2}\right) = -2022$ .

Следовательно,

$$2022 - \frac{(a-1)}{4} = -2022 \Rightarrow \frac{(a-1)}{4} = 4044 \Rightarrow a-1 = 16176 \Rightarrow a = 16177.$$

3. Найдите значение выражения  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ , если относительно  $a, b, c$  известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям:

$$a^3 - 2020a + 1010 = 0, \quad b^3 - 2020b + 1010 = 0, \quad c^3 - 2020c + 1010 = 0.$$

**Ответ:** 2.

**Решение.**

Кубическое уравнение  $t^3 - 2020t + 1010 = 0$  имеет три различных корня (так как для  $f(t) = t^3 - 2020t + 1010$ :  $f(-100) < 0, f(0) > 0, f(10) < 0, f(100) > 0$ ).

Пусть эти корни и будут  $a, b, c$ . Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ ab + bc + ac = -2020, \\ abc = -1010. \end{cases}$$

Найдем значение выражения:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{-2020}{-1010} = 2$ .

4. Докажите, что неравенство

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax - bz)^2 - (by - cx)^2 - (cz - ay)^2 \geq 0$$

выполняется для любых значений переменных  $a, b, c, x, y, z$ .

**Доказательство.**

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax - bz)^2 - (by - cx)^2 - (cz - ay)^2 = \\ = a^2z^2 + b^2x^2 + c^2y^2 - 2abxz + 2bcxy - 2acyz = (az - bx - cy)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем неравенство,

$$(az - bx - cy)^2 \geq 0,$$

которое выполняется для любых значений переменных  $a, b, c, x, y, z$ .

5. Через вершину  $M$  некоторого угла, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках  $N$  и  $K$ , а биссектрису этого угла – в точке  $L$ . Найдите сумму длин отрезков  $MN$  и  $MK$ , если площадь  $MNLK$  равна 49, а угол  $LMN$  равен  $30^\circ$ .

**Ответ:**  $14\sqrt[4]{3}$ .

**Решение.**

Пусть  $LP$  и  $LQ$  – перпендикуляры к  $MN$  и  $MK$  соответственно.

Точка  $L$  лежит на биссектрисе угла и следовательно равноудалена от сторон угла, а значит  $LP = LQ$ .

Прямоугольные треугольники  $NPL$  и  $LQK$  равны (по катету и гипотенузе), а также равны прямоугольные треугольники  $MPL$  и  $MQL$  (аналогично, по катету и гипотенузе).

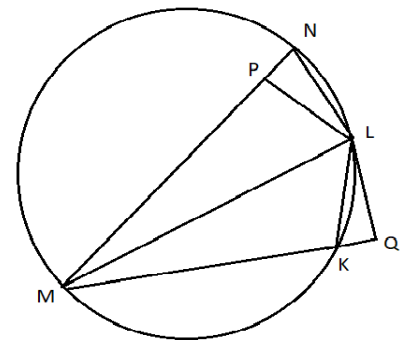
С одной стороны,

$$MN + MK = MP + PN + MK = MP + KQ + MK = MP + MQ = 2MP.$$

С другой стороны,

$$49 = S_{MNLK} = S_{MPL} + S_{MQL} = 2S_{MPL} = MP \cdot PL = MP^2 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{MP^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MP = 7\sqrt[4]{3}.$$

Таким образом, имеем  $MN + MK = 2MP = 14\sqrt[4]{3}$ .



**Критерии оценивания приведены в таблице:**

Баллы	Критерии оценивания
<b>7</b>	Полное обоснованное решение.
<b>6</b>	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
<b>5-6</b>	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
<b>4</b>	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
<b>2-3</b>	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
<b>1</b>	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
<b>0</b>	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.