Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2021-2022
МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Найдите все значения n, при которых сумма

$$1!+2!+3!+\cdots+n!, \quad \text{где} \quad n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n,$$

является точным квадратом.

Ответ: $\boldsymbol{n=1;\ 3}$.

Решение.

$1!=1=1^2$, $1!+2!=3$, $1!+2!+3!=9=3^2$, $1!+2!+3!+4!=33$,

$1!+2!+3!+4!+5!=33+120=153$.

В дальнейшем, последней цифрой всегда будет 3, так как прибавляться к 33 всегда будут числа, оканчивающиеся нулем. Следовательно, точных квадратов больше не будет. Таким образом, условию задачи удовлетворяют всего лишь два значения $n=1$ и $n=3$.

2. Про квадратный трехчлен $p(x)=(a+1)x^2-(a+1)x+2022$ известно, что $-2022\le p(x)\le 2022$ при $x\in[0;1]$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Ответ: $\boldsymbol{16175}$.

Решение. Так как $p(0)=p(1)=2022$, то графиком квадратного трехчлена является парабола, симметричная относительно прямой $x=\frac{1}{2}$. Из условий, что $-2022\le p(x)\le 2022$ при $x\in[0;1]$ и $p(0)=p(1)=2022$ следует, что ветви параболы направлены вверх. Тогда наименьшее значение $p(x)$ равно $p\left(\frac{1}{2}\right)=2022-\frac{(a+1)}{4}$. Наибольшее возможное значение a будет достигаться при $p\left(\frac{1}{2}\right)=-2022$. Следовательно,

$$2022-\frac{(a+1)}{4}=-2022 \Rightarrow \frac{(a+1)}{4}=4044 \Rightarrow a+1=16176 \Rightarrow a=16175 .$$

3. Найдите значение выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, если относительно $a,\ b,\ c$ известно, что это три различных действительных числа, удовлетворяющих условиям:

$a^3-2022a+1011=0$, $b^3-2022b+1011=0$, $c^3-2022c+1011=0$.

Ответ: $\mathbf{2}$.

Решение.

Кубическое уравнение $t^3-2022t+1011=0$ имеет три различных корня (так как для $f(t)=t^3-2022t+1011:\ f(-100)<0, f(0)>0, f(10)<0, f(100)>0$).

Пусть эти корни и будут a, b, c. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ ab+bc+ac=-2022, \\ abc=-1011. \end{cases}$$

Найдем значение выражения : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{-2022}{-1011}=2.$

4. Докажите, что неравенство

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+cx)^2-(cz-ay)^2 \geq 0$

выполняется для любых значений переменных $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z.$

Доказательство.

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+cx)^2-(cz-ay)^2=$$
$$=a^2z^2+b^2x^2+c^2y^2-2abxz-2bcxy+2acyz=(az-bx+cy)^2.$$

Следовательно, получаем неравенство,

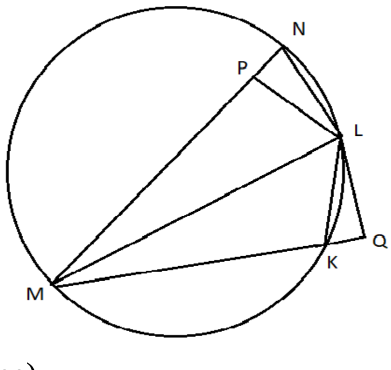
$$(az-bx+cy)^2 \geq 0,$$

которое выполняется для любых значений переменных $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z.$

5. Через вершину M некоторого угла, проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках N и K, а биссектрису этого угла – в точке L. Найдите сумму длин отрезков MN и MK, если площадь $MNLK$ равна 25, а угол LMN равен 30°.

Ответ: $\mathbf{10\sqrt[4]{3}}$.

Решение.



Пусть LP и LQ – перпендикуляры к MN и MK соответственно.

Точка L лежит на биссектрисе угла и следовательно равноудалена от сторон угла, а значит $LP=LQ$.

Прямоугольные треугольники NPL и LQK равны (по катету и гипотенузе), а также равны прямоугольные треугольники MPL и MQL (аналогично, по катету и гипотенузе).

С одной стороны,

$$MN+MK=MP+PN+MK=MP+KQ+MK=MP+MQ=2MP.$$

С другой стороны,

$$25=S_{MNLK}=S_{MPL}+S_{MQL}=2S_{MPL}=MP\cdot PL=MP^2\cdot \mathrm{tg}30°=\frac{MP^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MP=5\sqrt[4]{3}.$$

Таким образом, имеем $MN+MK=2MP=10\sqrt[4]{3}.$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.