Математика
Решение открытого билета

Тексты задач в чистовик можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия.

1. Цена на электрический чайник была повышена на 21% и составила 1815 рублей. Сколько стоил чайник до повышения цены?

   Решение. Пусть x рублей — цена чайника до повышения. Тогда

$$\begin{array}{rl} 1815 & \text{руб.} - 121\% \\ x & \text{руб.} - 100\% \end{array}$$

   Отсюда,

$$x = \frac{1815 \cdot 100}{121} = 1500 \quad \text{руб.}$$

   Ответ: $\boxed{1500}$

   При решении задач вычисления выполняются "вручную" на черновике. Использование калькулятора запрещено.

2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-12} = 8.$

   Решение. ОДЗ: $x \in R$.

   Перепишем уравнение в виде

$$2^{-(3x-12)} = 2^3;\ -3x + 12 = 3; -3x = -9;\ x = 3.$$

   Ответ: $\boxed{3}$

3. Решите уравнение $4\sqrt{x-1} = 6 - x.$

   Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения:

   $\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 = (6-x)^2, \qquad 16(x-1) = 36 - 12x + x^2, \quad x^2 - 28x + 52 = 0.$

   Решение квадратного уравнения нужно приводить полностью!

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \cdot 52}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{28 \pm 24}{2};$$

   $x_1 = 2 \quad$ или $\quad x_2 = 26.$

Проверка. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

$x_1 = 2 \qquad 4 \cdot \sqrt{1} = 4, \qquad 4 = 4$ — истина $\Rightarrow \quad x_1 = 2$ является корнем уравнения.

$x_2 = 26 \qquad 4 \cdot \sqrt{25} = -20 \quad \Rightarrow \quad 20 = -20$ — ложно $\Rightarrow x_2 = 26$ — посторонний корень.

Абитуриент может привести другое решение задачи. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы

$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{cases}$$

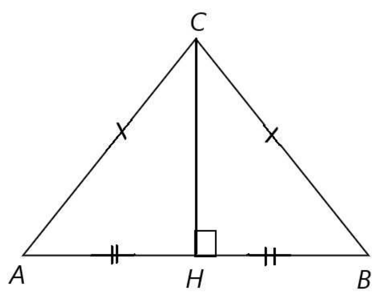
Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной x*:*
$x \leq 6$. *Если решение иррационального уравнения сведено к решению системы, то этим ограничением можно воспользоваться при отборе корней уравнения.* $x_2 = 26$ *— посторонний корень, так как не удовлетворяет ограничению на значения переменной* x*:* $\quad x \leq 6$.

Ответ: $\boxed{2}$

4. В $\triangle ABC \quad AC = BC = 20, \quad AB = 32$. Найдите $\sin A$.

Решение.

Обязательно сделайте чертеж! Чертёж выполняется ручкой. Разрешается пользоваться линейкой. Задача оценивается максимальным баллом, если правильно выполнен чертеж; приведены буквенные выражения искомых величин, и лишь затем подставлены их числовые значения; приведено полное обоснование с ссылками на геометрические свойства, теоремы, признаки подобия.



Опустим высоту CH на основание AB. Так как $\triangle ACB$ — равнобедренный, то CH — высота, медиана, биссектриса.

Следовательно, $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{32}{2} = 16$. Рассмотрим $\triangle ACH$. По теореме Пифагора

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{(20-16)\cdot(20+16)} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 36} = 2 \cdot 6 = 12.$$

Тогда $\sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

Ответ: $\boxed{\frac{3}{5}}$

5. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $S_1(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$ и $S_2(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (S — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

   Решение. Используем физический смысл производной. Так как

$$V_1(t) = S_1'(t) = \left(2t^3 - 5t^2 - 3t\right)' = 6t^2 - 10t - 3;$$

$$V_2(t) = S_2'(t) = \left(2t^3 - 3t^2 - 11t + 7\right)' = 6t^2 - 6t - 11.$$

   Так как по условию $V_1(t) = V_2(t)$, то

$$6t^2 - 10t - 3 = 6t^2 - 6t - 11, \qquad 4t = 8, \qquad t = 2.$$

   Тогда ускорения точек в момент времени $t = 2$

$$a_1(t) = V_1'(t) = \left(6t^2 - 10t - 3\right)' = 12t - 10, \qquad a_1(t=2) = 12\cdot 2 - 10 = 14;$$

$$a_2(t) = V_2'(t) = \left(6t^2 - 6t - 11\right)' = 12t - 6, \qquad a_2(t=2) = 12 \cdot 2 - 6 = 18.$$

   Ответ: $\boxed{14;\ 18}$

6. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

   Решение. Используем формулу двойного аргумента $\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ и основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - (0,6)^2} = \pm 0,8.$$

Так как $\alpha \in$ IV четверти, то $\sin\alpha < 0$, следовательно, $\sin\alpha = -0,8$.

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot (-0,8) \cdot 0,6 = -0,96$.

Ответ: $\boxed{-0{,}96}$

7. Два велосипедиста отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч — скорость второго велосипедиста. Составим таблицу по данным задачи:

	S	V	t
I	130 км	$(x+3)$ км/ч	$\frac{130}{x+3}$ ч
II	130 км	x км/ч	$\frac{130}{x}$ ч

Так как $t_2 - t_1 = 3$ ч, то составим уравнение:

$$\frac{130}{x} - \frac{130}{x+3} = 3,\ x > 0,\ \Rightarrow\ x^2 + 3x - 130 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета

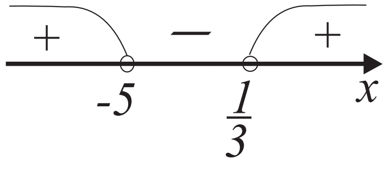
$$\left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 \cdot x_2 = 130; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -13, \\ x_2 = 10. \end{array}\right.$$

Корень уравнения $x_1 = -13$ — посторонний, так как $x > 0$ по условию задачи. Значит, скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, 10 км/ч.

Ответ: $\boxed{10}$

8. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1$

Решение. ОДЗ: $\frac{3x-1}{x+5} > 0$. Решим неравенство методом интервалов. Найдем критические точки: $x = 1/3$, $x = -5$. Отметим эти точки на числовой оси. Определим знак левой части неравенства на каждом интервале.Чередование знаков фиксируем на рисунке. Исследуем сами критические точки: так как неравенство строгое, точки не входят во множество решений.



Итак, ОДЗ: $x \in (-\infty; -5) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Перейдем к одинаковому основанию $\frac{1}{3}$.

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}.$$

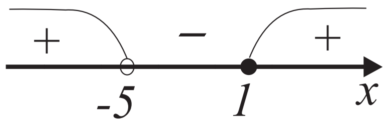
Так как основание логарифма $0 < \frac{1}{3} < 1$, то логарифмическая функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства меняется.

$$\frac{3x-1}{x+5} \geq \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+5} - \frac{1}{3} \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{9x-3-x-5}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8x-8}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{x+5} \geq 0.$$

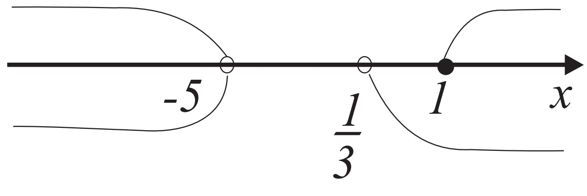
Решим неравенство методом интервалов.

Найдем критические точки: $x = 1$, $x = -5$. Отметим эти точки на числовой оси. Определим знак левой части неравенства на каждом интервале.Чередование знаков фиксируем на рисунке. Исследуем сами критические точки: точка $x = 1$ является нулем числителя и, так как неравенство нестрогое, входит в множество решений. Точка $x = -5$ не принадлежит множеству решений из-за того, что обращает в нуль знаменатель.



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

Учитывая ОДЗ, получим



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

Ответ: $\boxed{(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)}$

9. Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$6\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0.$$

Пусть $\sin x = t, \quad t \in [-1; 1]$.

$$6t^2 - 5t - 4 = 0, \quad \Longrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{5 \pm 11}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{4}{3}, \\ t_2 = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Корень уравнения $t_1 = \frac{4}{3}$ — посторонний, так как $t \in [-1; 1]$. Обратная замена: $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда имеем совокупность решений

$$\left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in Z; \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, & k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in Z}$.

Множество решений простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$ можно записать в виде $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$. Так же решение уравнения может быть записано только в градусах $x = -30^\circ + 360^\circ n$, $x = -150^\circ + 360^\circ k$, $n, k \in Z$. При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например, $x = -30^\circ + 2\pi n$ считается грубой ошибкой.