**МАТЕМАТИКА (10 класс)**

**Заключительный этап**

**Вариант 1**

1. Найдите все *x*, для которых , где целая часть числа *x*, дробная часть числа *x*, то есть

**Ответ:**

**Решение:**

Из уравнения и определений следует, что

Рассмотрим уравнение

1) если, то

2) если, то

Так как , то решения исходного уравнения

, , .

1. Два учителя математики принимают зачет по геометрии, проверяя умение решать задачи и знание теории у каждого из учеников 10 класса. У первого учителя на 1 ученика уходит соответственно 5 и 7 минут, а у второго учителя на 1 ученика ⎯ 3 и 4 минуты. За какое наименьшее время они сумеют опросить 25 учеников?

**Ответ:** **110 минут.**

**Решение: (оценка+пример)**

Пусть первый учитель принял зачет по задачам у *X* учеников, а по теории у *Y* учеников. Тогда второй учитель принял зачет по задачам у (25-*X*) учеников, а по теории у (25-*Y*) учеников. Пусть *T* ⎯ минимальное время, за которое они сумеют опросить 25 учеников. Тогда, учитывая условие задачи, составим систему неравенств

Откуда

Значит, меньше, чем за 110 минут принять зачет у 25 учеников невозможно.

Приведем пример (достижимости границы) :

Первый учитель принимает у 22 учеников только задачи и тратит на это 110 минут;

второй учитель у оставшихся троих принимает задачи и тратит на это 9 минут, и у всех 25 человек принимает теорию и тратит на это 100 минут, таким образом тратит 109 минут.

1. Относительно квадратного трехчлена известно, что он имеет два различных корня и удовлетворяет условию для любых *x* и *y*. Возможно ли, чтобы хотя бы один из корней является отрицательным?

**Ответ:** **нет.**

**Решение: (метод от противного)**

Предположим, что оба корня квадратного трехчлена неотрицательны.

Возьмем и подставим в неравенство, следовательно, получим, что

для любого *x.*

Тогда для любого . Отметим, что из этого, в частности, следует, что ветви параболы направлены вверх. Так как абсцисса вершины параболы положительна, то с одной стороны для нее должно выполняться , а с другой стороны . Пришли к противоречию.

1. Докажите, что для выполняется неравенство

**Доказательство:**

Разделим неравенство на 4, получим

Применим неравенство о средних к числам

1. Ученик построил четырехугольник *MNKL* и измерил расстояния от вершин до точки *P*, которую указал учитель. Оказалось, что , где 𝑆 – площадь четырехугольника. Что за четырехугольник построил ученик, и что за точку указал учитель?

**Ответ:** **квадрат, точка *P* ⎯ точка пересечения диагоналей.**

**Решение:**

Пусть *MP =a, NP= b, KP=c, LP=d,*  длины диагоналей обозначим через через ⎯ угол между диагоналями. Тогда

Используя неравенство о средних и условие задачи, получим

Таким образом, все неравенства переходят в равенства, то есть *a= b=c=d,*  . Следовательно, искомый четырехугольник квадрат, а точка *P* ⎯ точка пересечения диагоналей.

**Вариант 2**

1. Найдите все *x*, для которых , где целая часть числа *x*.

**Ответ:**

**Решение:**

Оценим левую часть уравнения снизу:

Следовательно, С другой стороны, , а значит целое число и делится на 10. Перебирая значения от 10 до 90, находим все решения удовлетворяющие исходному уравнению.

1. Два учителя математики принимают зачет по геометрии, проверяя умение решать задачи и знание теории у каждого из учеников 10 класса. У первого учителя на 1 ученика уходит соответственно 5 и 7 минут, а у второго учителя на 1 ученика ⎯ 3 и 4 минуты. За какое наименьшее время они сумеют опросить 25 учеников?

**Ответ:** **110 минут.**

**Решение:** полностью соответствует решению задачи 2 варианта 1.

1. Относительно квадратных трехчленов

… , известно, что каждый из них имеет по два корня. Обозначим через один из корней , где Найдите значение

**Ответ:** **0.**

**Решение:**

Так как , то

Аналогично можно получить следующие равенства:

Складывая эти равенства, получим

1. Докажите, что для выполняется неравенство

**Доказательство:**

Разделим неравенство на 4, получим

Применим неравенство о средних к числам

1. Ученик построил четырехугольник *MNKL* и измерил расстояния от вершин до точки *Q*, которую указал учитель. Оказалось, что , где 𝑆 – площадь четырехугольника. Что за четырехугольник построил ученик, и что за точку указал учитель?

**Ответ:** **квадрат, точка ⎯** *Q* **точка пересечения диагоналей.**

**Решение:**

Пусть *MQ =a, NQ = b, KQ =c, LQ =d,*  длины диагоналей обозначим через через ⎯ угол между диагоналями. Тогда

Используя неравенство о средних и условие задачи, получим

Таким образом, все неравенства переходят в равенства, то есть *a= b=c=d,*  . Следовательно, искомый четырехугольник квадрат, а точка *Q* ⎯ точка пересечения диагоналей.

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении. |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |