**МАТЕМАТИКА (8 класс)**

**Заключительный этап**

**Вариант 1**

1. Найдите все решения уравнения $\left(x-\left|x\right|\right)^{2}+x+\left|x\right|=2020 $.

**Ответ:** $\left\{1010; -\sqrt{505}\right\}.$

**Решение:**

1) Пусть $x\geq 0$, тогда$ \left(x-x\right)^{2}+x+x=2020$, получаем $x=1010.$

2) Пусть $x<0$, тогда$ \left(x+x\right)^{2}+x-x=2020$, получаем $4x^{2}=2020$, $x=\pm \sqrt{505},$ но так как $ x<0$, то $x=-\sqrt{505}.$

1. Известно, что двузначное число при делении на 4 дает в остатке 3, а при делении на 3 дает в остатке 2. Найдите все такие числа.

**Ответ:** $\left\{11;23;35;47;59;71;83;95\right\}.$

**Решение:**

Обозначим искомое число за *A*, тогда имеем $A=4m+3=3n+2$, откуда получаем линейное диофантово уравнение$ 3n-4m=1.$ Легко подбирая частное решение $m=n=-1$, получаем общее решение в виде

$\left\{\begin{array}{c}m=-1+3t,\\n=-1+4t, \end{array}\right.$ $t\in Z. $ $⇒ A=12t-1$,$ t\in Z.$

Учитывая, что *A-*двузначное число, получим $t=\overbar{1, 8}$ . Перебирая $ t=\overbar{1, 8}$, получим все искомые числа$ \left\{11;23;35;47;59;71;83;95\right\}.$

1. Коэффициенты квадратных трехчленов $f\left(x\right)=x^{2}+bx+c$ и $g\left(x\right)=x^{2}+ax+d$ удовлетворяют условию $0<a<b<c<d .$ Возможно ли, чтобы $f\left(x\right)$ и $ g\left(x\right)$ имели общий корень?

**Ответ: нет.**

**Решение: (методом от противного)**

Предположим, что $f\left(x\right)$ и $ g\left(x\right)$ имеют общий корень $x\_{0}$ . Так как все коэффициенты многочленов положительны, то все корни (если они есть) отрицательны.$⇒ x\_{0}<0. $Общий корень$ x\_{0}$ удовлетворяет условию $ x\_{0} \left(b-a\right)=d-c. $ Учитывая условие, что $0<a<b<c<d$, получим, что $ b-a>0$, $d-c>0$, откуда следует, что$ x\_{0}>0. $ Получили противоречие.

1. Докажите, что для любых чисел *a*, *b*, *c* выполняется неравенство

$a^{2}+b^{2}+c^{2}\geq ab-bc+ca$*.*

**Доказательство:**

$2a^{2}+2b^{2}+2c^{2}\geq 2ab-2bc+2ca$*,*

$a^{2}-2ab+b^{2}+b^{2}+2bc+c^{2}+a^{2}-2ac+c^{2}\geq 0$*,*

$$\left(a-b\right)^{2}+\left(b+c\right)^{2}+\left(a-c\right)^{2}\geq 0, $$

получили верное неравенство для$ ∀a, b, c.$

1. Внутренняя точка *P* остроугольного треугольника *ABC* удовлетворяет условию

$AB^{2}+PC^{2}=BC^{2}+AP^{2}=AC^{2}+BP^{2}$.

Чем является точка *P* для треугольника *ABC*?

**Ответ: точкой пересечения высот треугольника *ABC.***

**Решение:**

Проведем перпендикуляр $PH$ к стороне *AC* и высоту *BK*.

 По теореме Пифагора $ AB^{2}-AK^{2}=BC^{2}-CK^{2}$ или $ AB^{2}-BC^{2}=AK^{2}-CK^{2}$. Но по

 условию $AB^{2}-BC^{2}=AP^{2}-PC^{2}$. С другой стороны имеем, что $AP^{2}-AH^{2}=PC^{2}-HC^{2}$

 или $AP^{2}-PC^{2}=AH^{2}-HC^{2}$.Тогда $ AB^{2}-BC^{2}=AK^{2}-CK^{2}=AP^{2}-PC^{2}=AH^{2}-HC^{2}$.

 $⇒AK^{2}-CK^{2}=AH^{2}-HC^{2}$ $⇒$ точки *H* и *K* совпадают $⇒$ точка *P* лежит на высоте *BK.*

Аналогично доказывается, что точка *P* лежит на двух других высотах треугольника *ABC*, откуда следует, что точка *P* является точкой пересечения высот треугольника *ABC.*

**Вариант 2**

1. Найдите все решения уравнения $ \left(x-\left|x\right|\right)^{2}+2020(x+\left|x\right|)=2020 $.

**Ответ:** $\left\{0,5; -\sqrt{505}\right\}.$

**Решение:**

1) Пусть $x\geq 0$, тогда$ \left(x-x\right)^{2}+2020(x+x)=2020$, получаем $ x=0,5.$

2) Пусть $x<0$, тогда$ \left(x+x\right)^{2}+2020(x-x)=2020$, получаем $4x^{2}=2020$, $x=\pm \sqrt{505},$ но так как $ x<0$, то $x=-\sqrt{505}.$

1. Известно, что двузначное число при делении на 3 дает в остатке 1, а при делении на 5 дает в остатке 3. Найдите все такие числа.

**Ответ:** $\left\{13;23;43;58;73;88\right\}.$

**Решение:**

Обозначим искомое число за *A*, тогда имеем $A=3m+1=5n+3$, откуда получаем линейное диофантово уравнение$ 3m-5n=2.$ Легко подбирая частное решение $m=n=-1$, получаем общее решение в виде

$\left\{\begin{array}{c}m=-1+5t,\\n=-1+3t, \end{array}\right.$ $t\in Z. $ $⇒ A=15t-2$,$ t\in Z.$

Учитывая, что *A-*двузначное число, получим $t=\overbar{1, 6}$ . Перебирая $ t=\overbar{1, 6}$, получим все искомые числа$ \left\{13;23;43;58;73;88\right\}.$

1. Коэффициенты квадратных трехчленов $f\left(x\right)=x^{2}+mx+n$ и $p\left(x\right)=x^{2}+kx+l$ удовлетворяют условию $k>m>n>l>0 .$ Возможно ли, чтобы $f\left(x\right)$ и $ g\left(x\right)$ имели общий корень?

**Ответ: нет.**

**Решение: (методом от противного)**

Предположим, что $f\left(x\right)$ и $ g\left(x\right)$ имеют общий корень $x\_{0}$ . Так как все коэффициенты многочленов положительны, то все корни (если они есть) отрицательны.$⇒ x\_{0}<0. $Общий корень$ x\_{0}$ удовлетворяет условию $ x\_{0} \left(m-k\right)=l-n. $ Учитывая условие, что $k>m>n>l>0 $, получим, что $m-k<0$, $l-n<0$, откуда следует, что$ x\_{0}>0. $ Получили противоречие.

1. Докажите, что для любых чисел *a*, *b*, *c* выполняется неравенство

$a^{2}+b^{2}+c^{2}\geq ab-bc-ca$*.*

**Доказательство:**

$2a^{2}+2b^{2}+2c^{2}\geq 2ab-2bc-2ca$*,*

$a^{2}-2ab+b^{2}+b^{2}+2bc+c^{2}+a^{2}+2ac+c^{2}\geq 0$*,*

$$\left(a-b\right)^{2}+\left(b+c\right)^{2}+\left(a+c\right)^{2}\geq 0, $$

получили верное неравенство для$ ∀a, b, c.$

1. Внутренняя точка $Q$ остроугольного треугольника *MNK* удовлетворяет условию

$MN^{2}+QK^{2}=NK^{2}+MQ^{2}=MK^{2}+NQ^{2}$.

Чем является точка *Q* для треугольника *MNK*?

**Ответ: точкой пересечения высот треугольника *MNK.***

**Решение:**

Проведем перпендикуляр $QH$ к стороне *MK*  и высоту *BL*.

 По теореме Пифагора $ MN ^{2}-ML^{2}= NK^{2}-KL^{2}$ или $MN^{2}-NK^{2}=ML^{2}-KL^{2}$. Но по

 условию $MN^{2}-NK^{2}=MQ^{2}-QK^{2}$.

 С другой стороны имеем, что $MQ^{2}-MH^{2}=QK^{2}-HK^{2}$ или $MQ^{2}-QK^{2}=MH^{2}-HK^{2}$.

 Тогда$ MN^{2}-NK^{2}=ML^{2}-KL^{2}=MQ^{2}-QK^{2}=MH^{2}-HK^{2}⇒ML^{2}-KL^{2}=MH^{2}-HK^{2}$ $ ⇒$ точки *H* и *L* совпадают $⇒$ точка *Q* лежит на высоте *BL.*

Аналогично доказывается, что точка *Q*  лежит на двух других высотах треугольника *MNK*, откуда следует, что точка *Q* является точкой пересечения высот треугольника *MNK.*

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.  |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.  |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |