Министерство науки и высшего образования РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
(ТУСУР)

Н. Э. Лугина

Методические рекомендации для подготовки к вступительным экзаменам, проводимым ТУСУРом самостоятельно по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

Томск
Издательство ТУСУРа
2020

Лугина Н. Э.
Методические рекомендации для подготовки к вступительным экзаменам, проводимым ТУСУРом самостоятельно по дисциплине «МАТЕМАТИКА» : Методическое пособие / Н. Э. Лугина.— Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2020. — 71 с.

Пособие предназначено для подготовки выпускников общеобразовательных учреждений к экзамену по математике, проводимого ТУСУРом самостоятельно.

В пособие включены программа по математике, методические рекомендации по выполнению заданий. Приведены варианты заданий экзамена с решениями. Приведены варианты заданий для самостоятельного решения с указанием ответов.

Для абитуриентов и преподавателей общеобразовательных учреждений.

Оглавление

Введение

Цель данного пособия — ознакомить абитуриента с требованиями, которые предъявляются на вступительном экзамене по математике в ТУСУР, дать возможность абитуриенту составить представление о структуре будущего билета, количестве заданий, об их форме и уровне сложности, и помочь подготовиться к экзаменам в университет.

Для этого в пособие включены методические указания по основным темам, варианты заданий экзамена по математике в ТУСУР с решениями, варианты заданий для самостоятельного решения. Задания, включенные в пособие, отражают бо́льшую часть вопросов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов экзамена. Все задания предполагают развернутый ответ. Приведенные критерии оценки выполнения заданий дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развернутого ответа.

На экзамене по математике поступающий в ТУСУР должен показать:

- четкое знание математических определений;
- умение точно и сжато выражать математическую мысль в письменном изложении;
- умение использовать соответствующую символику;
- уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач.

Содержание и структура экзаменационной работы дают возможность достаточно полно проверить комплекс умений по предмету:

- уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- уметь выполнять вычисления и преобразования;
- уметь решать уравнения и неравенства;
- уметь выполнять действия с функциями;
- уметь решать системы уравнений и неравенств;
- уметь строить графики элементарных функций;
- уметь изображать геометрические фигуры на чертеже;
- уметь использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии при решении геометрических задач;
- уметь пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы при построении графиков функций;
- уметь строить и исследовать математические модели;
- уметь решать задачи с параметрами.

1. Программа подготовки по математике

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа. Делитель, кратное. Общие делители. Общее наименьшее кратное.

2. Рациональные числа, их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.

3. Действительные числа, их представление в виде десятичных дробей. Сравнение действительных чисел. Сложение, вычитание, умножение и деление действительных чисел.

4. Пропорции. Проценты.

5. Числовые промежутки. Модуль действительного числа, его геометрический смысл. Свойства модуля.

6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.

7. Степень с натуральным показателем. Определение и свойства арифметического корня.

8. Степень с рациональным показателем. Тождественные преобразования выражений, содержащих степень с рациональным показателем.

9. Одночлен и многочлен. Корень многочлена. Выделение полного квадрата трехчлена.

10. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений. Функция обратная данной. Понятие сложной функции.

11. График функции. Возрастание и убывание функции, периодичность, четность, нечетность. Преобразование графиков.

12. Определение и основные свойства функций: линейной $y = kx + b$, обратной пропорциональной зависимости $y = k/x$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = x^n$ $(n \in Z)$, показательной $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, логарифмической $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрических функций $(y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \mathrm{tg} x,\ y = \mathrm{ctg} x)$.

13. Формулы приведения. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Тригонометрические функции двойного и половинного аргумента. Формулы понижения степени. Формулы сложения аргументов. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

14. Логарифм произведения, частного, степени. Основное логарифмическое тождество. Формула перехода к другому основанию. Натуральный логарифм, десятичный логарифм.

15. Уравнение. Множество решений уравнений. Равносильные уравнения. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля. Рациональные алгебраические уравнения с параметрами. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Иррациональные уравнения.

Иррациональные уравнения с параметрами. Решение тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg} x = a$. Тригонометрические уравнения с параметрами.

16. Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств.

17. Неравенства, содержащие неизвестное. Множество решений неравенства. Решение линейных, квадратных и сводящихся к ним неравенств. Метод интервалов. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля. Рациональные алгебраические неравенства с параметрами. Показательные и логарифмические неравенства. Показательные и логарифмические неравенства с параметрами. Тригонометрические неравенства с параметрами.

18. Системы уравнений и неравенств. Решение системы. Множество решений системы. Равносильные системы уравнений. Системы уравнений и неравенств с параметрами.

19. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

20. Производная функции. Вычисление производных. Производная суммы двух функций. Производная произведения двух функций. Производная частного двух функций. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной. Механический смысл производной. Задачи с параметрами.

21. Достаточные условия возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции. Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Задачи с параметрами.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

2. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

3. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольников. Средняя линия треугольника. Свойства равнобедренного треугольника. Теорема Пифагора. Теорема косинусов. Теорема синусов. Сумма углов треугольника.

4. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция. Средняя линия трапеции.

5. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Свойства касательной к окружности. Дуга окружности. Сектор. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

6. Центральные и вписанные углы.

7. Вписанные и описанные многоугольники. Правильные многоугольники. Выражение стороны правильного

многоугольника через радиус описанной около него окружности.

8. Площадь многоугольника. Формулы площади: треугольника, параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции, правильного многоугольника (через радиус описанной около него окружности).

9. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

10. Подобие. Подобные фигуры. Признаки подобия треугольников. Отношение площадей подобных фигур.

2. Рекомендации по выполнению экзаменационной работы

Экзамен по математике проводится письменно. Экзаменационная работа состоит из 12 заданий. Все задания предполагают **развернутый ответ**.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 180 минут. Порядок выполнения заданий не важен. Ответы к заданиям записываются в любом виде, например, целого числа, обыкновенной несократимой дроби или конечной десятичной дроби.

Вся работа должна быть выполнена пастой одного цвета (синей или фиолетовой, или черной). Запрещается использование простого карандаша, корректора.

Необходимые для пояснения решения чертежи и рисунки выполняются от руки, разрешается пользоваться линейкой. Запрещается использование калькулятора.

При выполнении заданий нужно пользоваться черновиком. Все вычисления проводятся вручную на черновике. Полное решение задачи с обоснованиями нужно переписать в чистовик. Ответы выделяются прямоугольной рамкой. Единицы измерений в ответ писать не нужно. Черновик вкладывается в работу.

3. Образцы вариантов билетов и их решений

Представленная модель экзаменационной работы по математике (содержание, демонстрационные варианты, система оценивания) сохраняет преемственность с экзаменационной моделью прошлых лет и с моделью единого государственного экзамена по математике (профильный уровень) в тематике, примерном содержании и уровне сложности заданий.

Выполнение заданий 1 — 7 свидетельствует о наличии общематематических умений, необходимых человеку в современном обществе. Задания проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение ориентироваться в простейших геометрических конструкциях, строить математические модели. В целях эффективного отбора выпускников для продолжения образования в ТУСУРе, посредством заданий 8 — 12 осуществляется проверка освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности и на творческом уровне.

Тексты заданий предлагаемой модели экзаменационной работы в целом соответствуют формулировкам, принятым в учебниках и учебных пособиях, включенных в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых Министерством образования и науки РФ к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ основного общего и среднего общего образования.

Вариант 1

1. Цена на электрический чайник была повышена на 21% и составила 1815 рублей. Сколько стоил чайник до повышения цены?

2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-12} = 8.$

3. Решите уравнение $4\sqrt{x-1} = 6 - x.$

4. В треугольнике ABC $AC = BC = 20$, $AB = 32$. Найдите $\sin A$.

5. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $S_1(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$ и $S_2(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (S — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

6. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

7. Два велосипедиста отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

8. Решите неравенство $16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-3} \le \left(\frac{1}{64}\right)^{x}$

9. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \le 1$

10. а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

11. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $AD = 3\sqrt{10}$, основание $BC = \sqrt{10}$, высота $BM = 2\sqrt{10}$. Найдите радиус описанной окружности.

12. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(4x^2 - (9a+8)x + 5a^2 + 10a\right) \cdot \sqrt{x-9} = 0$$

имеет ровно два различных решения?

Решение задач Варианта 1

1. Цена на электрический чайник была повышена на 21% и составила 1815 рублей. Сколько стоил чайник до повышения цены?

Решение. Пусть x рублей — цена чайника до повышения. Тогда

$$\begin{aligned} 1815 \quad &\text{руб.} - 121\% \\ x \quad &\text{руб.} - 100\% \end{aligned}$$

Отсюда,

$$x = \frac{1815 \cdot 100}{121} = 1500 \quad \text{руб.}$$

Ответ: $\boxed{1500}$

Большинство текстовых задач требуют составления уравнения, но их можно решить и по действиям. За выбор способа решения и его рациональность баллы не снижаются. Основные проверяемые требования к математической подготовке в этой задаче: уметь проводить операции с процентами и долями, вычислять и округлять, проводить бытовые расчеты, уметь строить и исследовать простейшие математические модели.

В процессе решения нужно следить за единицами измерения и уметь переводить секунды и минуты в часы (и обратно), а километры в метры. Выполните проверку с точки зрения здравого смысла.

2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-12} = 8.$

   Решение. ОДЗ: $x \in R$.

   Перепишем уравнение в виде

$$2^{-(3x-12)} = 2^3; \quad -3x + 12 = 3; \quad -3x = -9; \quad x = 3.$$

   Ответ: $\boxed{3}$

3. Решите уравнение $4\sqrt{x-1} = 6 - x.$

   Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня: $\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 = (6-x)^2$, $16(x-1) = 36 - 12x + x^2, \quad x^2 - 28x + 52 = 0.$

   Решение квадратного уравнения в чистовике нужно приводить полностью.

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 52}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{28 \pm 24}{2};$$

   $x_1 = 2 \quad$ или $\quad x_2 = 26.$

   Проверка. Подставим найденные корни **в исходное уравнение**.

   $x_1 = 2 \qquad 4 \cdot \sqrt{1} = 4, \qquad 4 = 4$ — истина $\Rightarrow \; x_1 = 2$ является корнем уравнения.

   $x_2 = 26 \qquad 4 \cdot \sqrt{25} = -20 \;\; \Rightarrow \;\; 20 = -20$ — ложно $\Rightarrow x_2 = 26$ — посторонний корень.

Абитуриент может привести другое решение задачи. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы

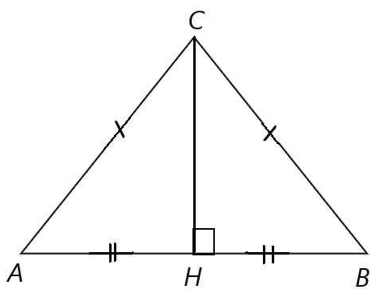
$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{cases}$$

Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной x*:*
$x \leq 6$*. Если решение иррационального уравнения сведено к решению системы, то этим ограничением можно воспользоваться при отборе корней уравнения.* $x_2 = 26$ *— посторонний корень, так как не удовлетворяет ограничению* $x \leq 6$.

Ответ: $\boxed{2}$

4. В $\triangle ABC$ $\quad AC = BC = 20, \quad AB = 32$. Найдите $\sin A$.

Решение.



Опустим высоту CH на основание AB. Так как $\triangle ACB$ — равнобедренный, то CH — высота, медиана, биссектриса.

Следовательно, $AH = HB = \frac{AB}{2} = 16$. По теореме Пифагора

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{(20-16)\cdot(20+16)} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 36} = 2 \cdot 6 = 12.$$

Тогда $\sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

При решении геометрической задачи нужно аккуратно выполнить чертеж. Чертеж выполняется от руки. Разрешается пользоваться линейкой. Чертеж облегчает понимание взаимного расположения элементов. В решении все выражения сначала должны быть записаны в буквенных обозначениях, и лишь затем должны быть подставлены числовые данные. Необходимо ссылаться на теоремы и свойства.

Ответ: $\boxed{\frac{3}{5}}$

5. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $S_1(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$ и $S_2(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (S — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

Решение.

$$v_1(t) = S_1'(t) = \left(2t^3 - 5t^2 - 3t\right)' = 6t^2 - 10t - 3;$$

$$v_2(t) = S_2'(t) = \left(2t^3 - 3t^2 - 11t + 7\right)' = 6t^2 - 6t - 11.$$

Так как по условию $v_1(t) = v_2(t)$, то

$$6t^2 - 10t - 3 = 6t^2 - 6t - 11, \qquad 4t = 8, \qquad t = 2.$$

Тогда

$$a_1(t) = \upsilon_1'(t) = \left(6t^2 - 10t - 3\right)' = 12t - 10,$$

$$a_1(t = 2) = 12 \cdot 2 - 10 = 14;$$

$$a_2(t) = \upsilon_2'(t) = \left(6t^2 - 6t - 11\right)' = 12t - 6,$$

$$a_2(t = 2) = 12 \cdot 2 - 6 = 18.$$

Ответ: $\boxed{14;\ 18}$

6. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

   Решение. $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha;$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - (0,6)^2} = \pm 0,8.$$

   Так как $\alpha \in$ IV четверти, то $\sin\alpha < 0$, следовательно, $\sin\alpha = -0,8$.

   $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot (-0,8) \cdot 0,6 = -0,96.$

   Ответ: $\boxed{-0,96}$

7. Два велосипедиста отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

   Решение. Рекомендуется для наглядности заполнять таблицу, в которую вносятся известные по условию величины, выбранная переменная или переменные, после чего в пустые клетки вписываются соответствующие им величины, выраженные через введенные переменные, и *только потом приступать к составлению уравнения (или системы).*

Пусть x км/ч — скорость второго велосипедиста. Составим таблицу по данным задачи:

	S	v	$t = \frac{S}{v}$
I	130 км	$(x+3)$ км/ч	$\frac{130}{x+3}$ ч
II	130 км	x км/ч	$\frac{130}{x}$ ч

При составлении математической модели большинства задач этого раздела получается дробно-рациональное или линейное уравнение. При решении дробно-рационального уравнения в текстовой задаче необязательно выписывать область допустимых значений неизвестного, но при этом нужно учитывать физический смысл задачи.

Так как $t_2 - t_1 = 3$ ч, то составим уравнение:

$$\frac{130}{x} - \frac{130}{x+3} = 3, \quad x > 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x - 130 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,

$$\left[\begin{aligned} &x_1 + x_2 = -3, \\ &x_1 \cdot x_2 = -130; \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x_1 = -13, \\ &x_2 = 10. \end{aligned}\right.$$

Отдельно стоит обратить внимание на необходимость самопроверки при решении текстовых задач, которая должна опираться на житейскую логику и общий кругозор. Прежде чем записывать ответ, прочитайте снова вопрос задачи.

Корень уравнения $x_1 = -13$ — посторонний, так как $x > 0$ по условию задачи. Значит, скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, 10 км/ч.

Ответ: $\boxed{10}$

8. Решите неравенство $\qquad 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-3} \leq \left(\frac{1}{64}\right)^{x}$

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Приведем обе части неравенства к одинаковому основанию $\frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-3} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}; \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-5} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}.$$

Так как основание показательной функции
$0 < \frac{1}{4} < 1$, то показательная функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству в показателе степени знак неравенства меняется на противоположный: $x^2 - x - 5 \geq 3x$, $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

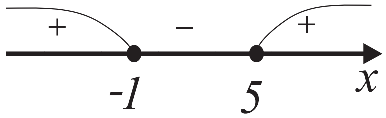
$f(x) = x^2 - 4x - 5$. Решим неравенство методом интервалов. Найдем нули функции — критические точки.

$$x^2 - 4x - 5 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}.$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 5 \Rightarrow (x+1)(x-5) \geq 0$$

Критические точки разбивают числовую ось на три интервала. Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале. Исследуем сами критические точки: неравенство нестрогое, точки входят во множество решений.

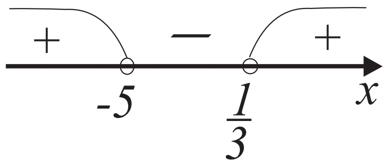


$x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $\boxed{(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)}$

9. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \le 1$

Решение. ОДЗ: $\frac{3x-1}{x+5} > 0$. Решим неравенство методом интервалов.



Итак, ОДЗ: $x \in (-\infty; -5) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Перейдем к одинаковому основанию $\frac{1}{3}$.

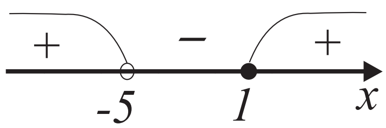
$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \le \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}.$$

Так как основание логарифма $0 < \frac{1}{3} < 1$, то логарифмическая функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства меняется на противоположный.

$$\frac{3x-1}{x+5} \ge \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+5} - \frac{1}{3} \ge 0 \quad \Longrightarrow$$

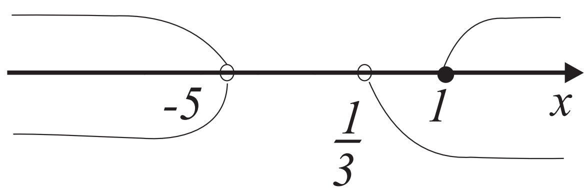
$$\frac{9x-3-x-5}{3(x+5)} \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8x-8}{3(x+5)} \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{x+5} \ge 0.$$

Решим неравенство методом интервалов.



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

Учитывая ОДЗ, получим



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

Ответ: $\boxed{(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)}$

Самые распространенные ошибки связаны с формальным перенесением методов и приёмов решения уравнений на неравенства того же типа. Это, в частности, умножение неравенства на выражение с переменной без учета знака этого выражения, в применении к неравенству свойства пропорции, переход от дробно-рационального неравенства к неравенству, связывающему числители ("отбрасывание знаменателя"), замена на первом этапе решения неравенства уравнением.

10. а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение. а) Найдем общее решение уравнения

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$6\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0.$$

Пусть $\sin x = t, \quad t \in [-1; 1]$.

$$6t^2 - 5t - 4 = 0,$$

$$\Longrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 6}}{2 \cdot 6} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{5 \pm 11}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{4}{3}, \\ t_2 = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Корень уравнения $t_1 = \frac{4}{3}$ — посторонний, так как $t \in [-1; 1]$. Обратная замена: $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда имеем совокупность решений

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z; \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. Подставим в общее решение $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$, целые значения n.

$n = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{6} \notin [-\frac{5\pi}{2}; -\pi];$

$n = -1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6};\;\; x = -\frac{13\pi}{6} \in [-\frac{5\pi}{2}; -\pi];$

$n = -2 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{25\pi}{6};\;\; x = -\frac{25\pi}{6} \notin [-\frac{5\pi}{2}; -\pi].$

Подставим в общее решение $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z$, целые значения k.

$k = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{5\pi}{6} \notin [-\frac{5\pi}{2}; -\pi],$

$k = -1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{17\pi}{6};\;\; x = -\frac{17\pi}{6} \notin [-\frac{5\pi}{2}; -\pi].$

Получили число: $-\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: $\boxed{\text{а) } x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z;\;\; x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in Z;}$

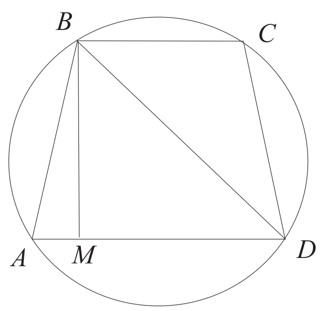
$\boxed{\text{б) } -\frac{13\pi}{6}.}$

Общее решение уравнения $\sin x = a$ *может быть записано с использованием формулы*

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z.$$

Как общее решение, так и отобранные корни уравнения могут быть записаны только в градусах. При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например, $x = 90° + 2\pi n$ считается ошибкой. Отбор корней, принадлежащих отрезку, может быть выполнен с помощью числовой окружности. Необходимо указывать, какому числовому множеству принадлежат n и k.

11. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $AD = 3\sqrt{10}$, основание $BC = \sqrt{10}$, высота $BM = 2\sqrt{10}$. Найдите радиус описанной окружности.



Решение. Окружность, описанная около трапеции, является также описанной вокруг $\triangle ABD$. По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = 2R.$$

В $\triangle ABM$ найдем AM. Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $AM = \frac{AD-BC}{2} = \sqrt{10}$.

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{50}.$$

В $\triangle BMD$ найдем $MD = BC + AM = 2\sqrt{10}$.

По теореме Пифагора найдем BD

$$BD = \sqrt{MD^2 + BM^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2} = \sqrt{80}.$$

Отсюда находим $\sin\angle ADB = \frac{BM}{BD} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{80}} = \frac{2}{\sqrt{8}}$. Тогда

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ADB} = \frac{\sqrt{50}}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{50\cdot 8}}{4} = \frac{\sqrt{400}}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Ответ: $\boxed{5}$.

Решение геометрических задач часто вызывает трудности у абитуриентов. Ведь геометрические задачи настолько многообразны, что невозможно дать какие-либо общие указания к их решению. Редко какая задача в геометрии может быть решена только с использованием определенной формулы. При решении большинства задач необходимо свободно владеть всем теоретическим материалом.

Выполняя чертеж (рисунок), стремитесь сделать его соответствующим условиям задачи. Так, если сказано, что некоторый угол вдвое больше другого или отрезки перпендикулярны, отразите это на чертеже. Хороший чертеж — это удобный для восприятия наглядный способ записи условий задачи, он может стать помощником в решении задачи, подсказать правильный ход рассуждений. В то же время, правильный чертеж ничего не доказывает, так как все должно быть обосновано соответствующим логическим выводом.

Начиная решать задачу, используйте определения и свойства входящих в задачу данных и искомых элементов, ведите рассуждения: треугольник равнобедренный, следовательно, ..., две касательные проведены из *одной точки, следовательно, ..., окружность описана около прямоугольного треугольника, следовательно, ... Вспомните теоремы, в которых связаны данные и искомые элементы задачи, вспомните похожие задачи. Геометрическая задача оценивается максимальным баллом, если правильно выполнен чертеж; приведены буквенные выражения искомых величин, и лишь затем подставлены их числовые значения; приведено полное обоснование с ссылками на геометрические свойства, теоремы, признаки подобия.*

12. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(4x^2-(9a+8)x+5a^2+10a\right)\cdot\sqrt{x-9}=0$$

имеет ровно два различных решения?

Решение. ОДЗ: $x \geq 9, \quad a \in R$.

Если $x = 9$, то уравнение уже имеет одно решение при любом a. Тогда второе решение данного уравнения может быть получено при выполнении условий:

1) $D = 0$ и единственный корень принадлежит ОДЗ;

2) $D > 0$, но $x_1 \in$ ОДЗ, а $x_2 \notin$ ОДЗ; или $x_1 \notin$ ОДЗ, а $x_2 \in$ ОДЗ.

Исследуем эти случаи.

1) $D = 0; \quad D = a^2 - 16a + 64 = 0, \quad D = (a-8)^2 = 0.$

Если $a = 8$, то $x_1 = x_2 = 10 \in [9; +\infty)$. Поэтому при $a = 8$ уравнение имеет ровно два решения: $x_1 = 9$ и $x_2 = 10$.

2) $D > 0$.

$$4x^2 - (9a+8)x + 5a^2 + 10a = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9a + 8 \pm \sqrt{(9a+8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (5a^2 + 10a)}}{2 \cdot 4},$$

$$x_{1,2} = \frac{9a + 8 \pm \sqrt{(a-8)^2}}{8}; \qquad x_{1,2} = \frac{9a + 8 \pm (a-8)}{8}.$$

Тогда $a \neq 8, \quad x_1 = a + 2, \quad x_2 = \frac{5}{4}a$.

Решим совокупность систем

$$\begin{cases} a + 2 > 9, \\ \frac{5}{4}a \leq 9 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a + 2 \leq 9, \\ \frac{5}{4}a > 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a > 7, \\ a \leq \frac{36}{5}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \leq 7, \\ a > \frac{36}{5}. \end{cases}$$

Отсюда получаем решение первой системы: $a \in \left(7; \frac{36}{5}\right]$; решение второй системы: $a \in \varnothing$.

Ответ: $\boxed{a \in \left(7; \frac{36}{5}\right] \cup \{8\}}$

Задача с параметром оценивается максимальным баллом при наличии полного обоснованного решения. Учитесь обосновывать решение письменно, пояснять свои действия, анализировать, подводить под понятие, устанавливать аналогии, делать выводы, опираясь на имеющиеся данные, установленные факты, теоремы, свойства, признаки. Набор формул с правильным ответом без обоснований и пояснений оценивается меньшим баллом. Правильный ответ без обоснований и пояснений — 0 баллов.

Вариант 2

1. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5%. Книга стоит 140 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

2. Решите уравнение $4 \cdot (0,5)^{x^2+4x} = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

3. Решите уравнение $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 25$, $BC = 24$. Найдите $\cos A$.

5. Через точку $M(x;y)$ графика функции $f(x) = \ln(x-2) - 0,5x^2$ проведена касательная. Угловой коэффициент этой касательной равен -2. Найдите координаты точки M.

6. Найдите значение выражения $\sqrt{2} \cdot \sin\frac{7\pi}{8} \cdot \cos\frac{7\pi}{8}$

7. Свежие грибы содержат по весу 90% воды, а сухие 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 44 кг свежих?

8. Решите неравенство $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x} \leq \frac{1}{27}$

9. Решите неравенство $(\log_3 3x)^2 - 3 \cdot \log_3 x > 7$

10. а) Решите уравнение
$$\frac{1}{\sin x} - 1 = \mathrm{ctg} x - \cos x.$$
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 4\pi]$.

11. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что длина отрезка OC равна 5.

12. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 6, \\ y = 8 + a(x-6) \end{cases}$$
имеет два различных решения.

Решение задач Варианта 2.

1. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5%. Книга стоит 140 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?
Решение. Пусть x рублей — цена книги со скидкой. Так как скидка составляет 5%, то покупатель заплатит $100\% - 5\% = 95\%$ её первоначальной цены. Тогда
$$\begin{aligned} 140 \quad &\text{руб.} - 100\% \\ x \quad &\text{руб.} - 95\% \end{aligned}$$
Отсюда,
$$x = \frac{140 \cdot 95}{100} = 133 \quad \text{руб.}$$
Ответ: $\boxed{133}$

2. Решите уравнение $\qquad 4 \cdot (0,5)^{x^2+4x} = \left(\frac{1}{8}\right)^x$

Решение. ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$
$$4 \cdot (0,5)^{x^2+4x} = \left(\frac{1}{8}\right)^x$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x};$$

$$-2+x^2+4x=3x \qquad x^2+x-2=0.$$

По свойству коэффициентов $a+b+c=0$ имеем $1+1-2=0$, следовательно, $x_1=1$, $\;x_2=-2$.

Ответ: $\boxed{-2;\ 1}$

3. Решите уравнение $\qquad \sqrt{4+2x-x^2}=x-2$

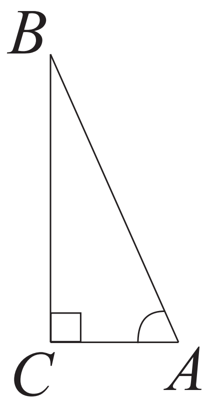
Решение. $\qquad \sqrt{4+2x-x^2}=x-2;$

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ \left(\sqrt{4+2x-x^2}\right)^2=(x-2)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ 4+2x-x^2=x^2-4x+4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2, \\ 2x^2-6x=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow\; x=3.$$

Ответ: $\boxed{3}$

4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\;AB=25$, $\;BC=24$. Найдите $\cos A$.



Решение. $\qquad \cos A=\frac{AC}{AB}.$

По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = $
$= \sqrt{(25-24)(25+24)} = \sqrt{49} = 7$.

Тогда $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{25} = 0{,}28$.

Ответ: $\boxed{0{,}28}$

5. Через точку $M(x;y)$ графика функции $f(x) = \ln(x-2) - 0,5x^2$ проведена касательная. Угловой коэффициент этой касательной равен -2. Найдите координаты точки M.

Решение. ОДЗ: $x > 2$. Так как геометрический смысл производной функции в данной точке x_0 $\boxed{f'(x_0) = k}$,

где k — угловой коэффициент касательной, то получаем $f'(x) = \big(\ln(x-2) - 0,5x^2\big)' = \frac{1}{x-2} - x$. Тогда $\frac{1}{x-2} - x = -2$, $\frac{1}{x-2} = x - 2, \;\Rightarrow\; (x-2)^2 = 1$,

$$\left[\begin{array}{l} x-2=-1, \\ x-2=1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3. \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \; x_1 = 1$ или $\; x_2 = 3$.

$x_1 = 1 \in \varnothing$, так как $x > 2$; $\; x_2 = 3$ — удовлетворяет ОДЗ.

Найдем координаты точки M. $\; f(3) = \ln 1 - 0,5 \cdot 3^2 = -4,5$. Тогда координаты точки $M(3;-4,5)$.

Ответ: $\boxed{M(3;-4,5)}$

6. Найдите значение выражения $\sqrt{2} \cdot \sin\frac{7\pi}{8} \cdot \cos\frac{7\pi}{8}$

Решение. Используем формулу двойного угла

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

$$\sqrt{2} \cdot \sin\frac{7\pi}{8} \cdot \cos = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{7\pi}{8} \cdot \cos\frac{7\pi}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right).$$

По формуле приведения

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\boxed{-\frac{1}{2}}$

7. Свежие грибы содержат по весу 90% воды, а сухие 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 44 кг свежих?

Решение. Свежие грибы содержат воду (90%) и вещество (10%). Сухие грибы содержат воду (12%) и вещество (88%). Процесс сушки грибов состоит в том, что вода испаряется, а вещество остается. Согласно условию, 10% от 44 кг составляет $44 \cdot 0{,}1 = 4{,}4$ кг. Эти 4,4 кг составляют 88% вещества. Тогда

$$\begin{aligned} &4{,}4 \quad \text{кг} - 88\% \\ &x \quad \text{кг} - 100\% \end{aligned}$$

Отсюда,

$$x = \frac{4,4 \cdot 100}{88} = 5 \quad \text{кг}.$$

Ответ: $\boxed{5}$

8. Решите неравенство $\qquad 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x} \leq \frac{1}{27}$

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Приведем обе части неравенства к одинаковому основанию $\frac{1}{3}$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3}; \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{3}.$$

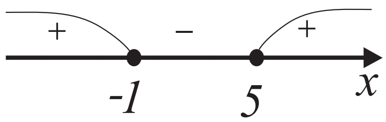
Так как основание показательной функции
$0 < 1/3 < 1$, то показательная функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству в показателе степени знак неравенства меняется на противоположный:

$x^2 - 4x - 2 \geq 3, \quad x^2 - 4x - 5 \geq 0.$

Решим неравенство методом интервалов.

$$x^2 - 4x - 5 = 0, \qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad \text{или} \quad x_2 = -1 \Longrightarrow (x+1)(x-5) \geq 0$$



$x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty).$

Ответ: $\boxed{(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)}$

9. Решите неравенство $\quad (\log_3 3x)^2 - 3 \cdot \log_3 x > 7$

Решение. ОДЗ: $x > 0$, то есть $x \in (0; +\infty)$.

Воспользуемся свойством логарифма.

$(\log_3 3 + \log_3 x)^2 - 3 \cdot \log_3 x - 7 > 0,$

$(1 + \log_3 x)^2 - 3 \cdot \log_3 x - 7 > 0, \qquad (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 > 0.$

Введем новую переменную: $\log_3 x = t$, $t \in R$.

Неравенство примет вид $\qquad t^2 - t - 6 > 0.$

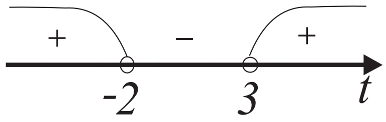
Найдем нули функции $f(t) = t^2 - t - 6$.

$$t^2 - t - 6 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-6)}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \qquad t_1 = -2 \qquad \text{или} \qquad t_2 = 3.$$

$t^2 - t - 6 > 0 \implies (t+2)(t-3) > 0.$

Решим промежуточное неравенство методом интервалов

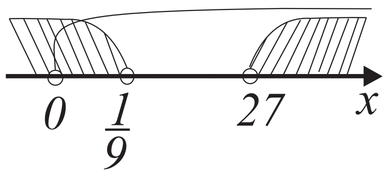


$\left[\begin{array}{l} t < -2, \\ t > 3. \end{array}\right.$ Вернемся к прежней переменной.

$\left[\begin{array}{l} \log_3 x < -2, \\ \log_3 x > 3. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x < \log_3 3^{-2}, \\ \log_3 x > \log_3 3^3. \end{array}\right.$

Так как основание логарифма $3 > 1$, то логарифмическая функция монотонно возрастающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства сохраняется. $\left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{9}, \\ x > 27. \end{array}\right.$

Учитывая ОДЗ, получим $x \in (0; 1/9) \cup (27; +\infty)$



Ответ: $\boxed{(0; 1/9) \cup (27; +\infty)}$

10. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin x} - 1 = \mathrm{ctg} x - \cos x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 4\pi]$.

Решение. а) ОДЗ: $\sin x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pi n,\ n \in Z$. Найдем общее решение уравнения. Воспользуемся определением $\mathrm{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$\frac{1}{\sin x} - 1 = \frac{\cos x}{\sin x} - \cos x, \qquad \frac{1}{\sin x} - 1 = \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right).$

$\left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) - \cos x \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) = 0, \qquad \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) \cdot (1 - \cos x) = 0.$

$$\Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sin x} - 1 = 0, \\ 1 - \cos x = 0. \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \cos x = 1. \end{array}\right. \qquad \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z \\ x = 2\pi k, \quad k \in Z. \end{array}\right.$$

Полученное решение $x = 2\pi k, \quad k \in Z$, не удовлетворяет ОДЗ.

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[0;\ 4\pi]$. Подставим в общее решение $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$, целые значения n. Так как задан числовой отрезок на положительной оси, то и значения n будем брать целые положительные.

$n = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} \in [0; 4\pi], \qquad n = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{5\pi}{2} \in [0; 4\pi].$

Для остальных $\quad n \quad x \notin [0; 4\pi].$

Получили числа $\frac{\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $\boxed{\text{а) } \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad \text{б) } \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}}$

Как общее решение, так и отобранные корни могут быть записаны только в градусах. Например, найдем корни, удовлетворяющие условию $\quad 0° \le x \le 720°$. *Для этого будем подставлять в общее решение*

$$x = 90° + 360° n, \quad n \in Z$$

целые значения n. *Так как задан числовой отрезок на положительной оси, то и значения* n *будем брать целые положительные.*

$n = 0 \;\Rightarrow\; x = 90° \in [0°; 720°],$

$n = 1 \;\Rightarrow\; x = 450° \in [0°; 720°].$

Для остальных n $x \notin [0°; 720°]$. *В решении пункта б) необходимо выполнить полный перебор значений* n *и показать, что при других значениях* n *найденные корни уравнения не войдут в заданный числовой отрезок значений. Неполный перебор считается ошибкой, и экзаменатор имеет право снизить баллы.*

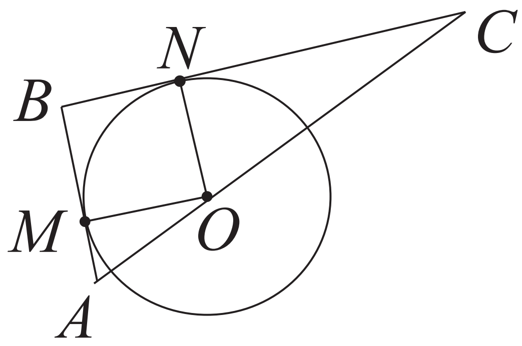
Корни, принадлежащие заданному отрезку, могут быть отобраны с помощью числовой окружности. Необходимо указывать, какому числовому множеству принадлежит n.

Ответ: $\boxed{\text{а) } 90° + 360°n, \quad n \in Z; \quad \text{б) } 90°; \quad 450°}$

При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например, $x = 90° + 2\pi n$ *считается ошибкой.*

11. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что длина отрезка OC равна 5.

Решение. Пусть ABC — данный в условии задачи треугольник. Обозначим через M, N точки касания окружности соответственно со сторонами AB и BC. Соединив эти точки с центром O окружности, получим квадрат $MBNO$, и поэтому $BN = OM = 3$. Треугольник ONC прямоугольный, в нем $OC = 5$, $ON = 3$.



Следовательно, по теореме Пифагора

$$NC = \sqrt{OC^2 - ON^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Тогда $BC = NC + BN = 4 + 3 = 7$.

Треугольники ONC и ABC подобны, так как $\angle B =$
$= \angle N = 90^\circ$, $\angle C$ — общий. Поэтому

$$\triangle ONC \sim \triangle ABC \Longrightarrow \frac{AB}{ON} = \frac{BC}{NC} \Longrightarrow \frac{AB}{3} = \frac{7}{4} \Longrightarrow AB = \frac{21}{4}$$

Теперь находим S — площадь прямоугольного треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{4} \cdot 7 = \frac{147}{8}.$$

Ответ: $\boxed{\frac{147}{8}}$

12. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 6, \\ y = 8 + a(x - 6) \end{cases}$$

имеет два различных решения.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $a \in R$. Используя свойства логарифма, исходная система примет вид

$$\begin{cases} xy = 64, \\ y = 8 + a(x - 6). \end{cases}$$

Подставив y в первое уравнение системы, получим

$$ax^2 - (6a - 8)x - 64 = 0.$$

Система уравнений будет иметь два различных решения, если квадратное уравнение будет иметь два различных корня, принадлежащих ОДЗ:

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases} \Longrightarrow \quad \text{по теореме Виета} \quad \begin{cases} D > 0, \\ x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0. \end{cases}$$

В первую очередь нужно рассмотреть случай, когда $a = 0$. В этом случае полученное уравнение имеет единственный корень $x = 8$, что не подходит по условию задачи. Следовательно, $a \neq 0$.

Для случая "два различных положительных корня" имеем

$$D = (6a - 8)^2 - 4 \cdot (-64) \cdot a, \qquad D = 4(9a^2 + 40a + 16) > 0.$$

$$9a^2 + 40a + 16 = 0,$$

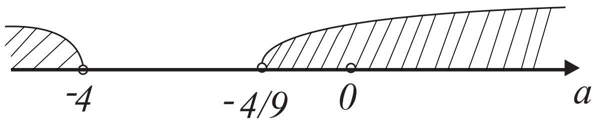
$$a_{1,\,2} = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9}}{18} = \frac{-40 \pm 32}{18}$$

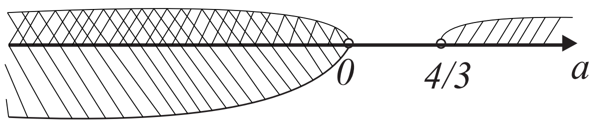
$$\left[\begin{array}{l} a_1 = -4, \\ a_2 = -\frac{4}{9}. \end{array} \right.$$

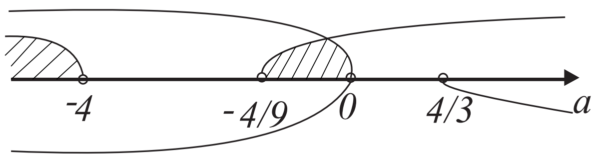
Решим неравенство $(a + 4)(a + \frac{4}{9}) > 0$ методом интервалов.

Отсюда $a < -4$ или $a > -\frac{4}{9}$. Обеспечим выполнение всех условий с помощью теоремы Виета:

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ \left[\begin{aligned} & a < -4, \\ & a > -\frac{4}{9}; \end{aligned} \right. \\ \frac{6a-8}{a} > 0, \\ -\frac{64}{a} > 0. \end{cases}$$







Отсюда $a \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{9}; 0)$.

Ответ: $\boxed{a \in (-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{9}; 0)}$

Вариант 3

1. Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

2. Решите уравнение $\log_2\left(x^2 - 3\right) - \log_2(1 - 2x) = 1$.

3. Решите уравнение $\sqrt{5 - 7x + 2x^2} = 1 - x$

4. Найдите хорду, на которую опирается угол $60°$, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.

5. Найдите точку максимума функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

6. Найдите значение выражения
$$\frac{\sqrt[3]{400} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{80}}$$

7. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада красила весь забор.

8. Решите неравенство $\quad 5^{2x+1} > 5^x + 4$

9. Решите неравенство $\quad \log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \le 0$

10. а) Решите уравнение $\frac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x - \sin x = \cos x$.

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

11. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке M. Найдите площадь треугольника ACM, если $AC = 3$ и $BC = 1$.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно решение системы $\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$

Решение задач Варианта 3.

1. Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

   Решение. Пусть x рублей — цена флакона шампуня со скидкой. Так как скидка составляет 25%, то покупатель заплатит $100\% - 25\% = 75\%$ первоначальной цены флакона. Тогда
$$\begin{aligned} 160 \quad &\text{руб.} - 100\% \\ x \quad &\text{руб.} - 75\% \end{aligned}$$
   Отсюда,
$$x = \frac{160 \cdot 75}{100} = 120 \quad \text{руб.}$$
   Тогда на 1000 рублей можно купить $1000 : 120 \approx 8{,}33$ то есть 8 флаконов шампуня.

   Ответ: $\boxed{8}$

2. Решите уравнение $\log_2\left(x^2-3\right) - \log_2(1-2x) = 1.$

   Решение. $\log_2\left(x^2-3\right) - \log_2(1-2x) = 1.$
$$\log_2\left(x^2-3\right) = \log_2 2 + \log_2(1-2x);$$
$$\log_2\left(x^2-3\right) = \log_2(2\cdot(1-2x));$$
$$x^2-3 = 2(1-2x) \Longrightarrow x^2+4x-5=0.$$
   По свойству коэффициентов $a+b+c=0$ $\quad 1+4-5=0$, следовательно, $x_1 = 1$ или $x_2 = -5$. Выполним проверку, которая является частью решения этого уравнения. При подстановке $x_1 = 1$ **в исходное уравнение** появляется выражение $\log_2(-2)$, которое не определено. Значит, $x_1 = 1$ не

является решением исходного уравнения. Подставим $x_2 = -5$ **в исходное уравнение**:

$$\log_2\left((-5)^2 - 3\right) - \log_2(1 - 2(-5)) = 1$$

$$\log_2\left(\frac{22}{11}\right) = 1 \Longrightarrow \log_2 2 = 1 \Longrightarrow 1 = 1.$$

Подстановка $x_2 = -5$ **в исходное уравнение** приводит к верному равенству, значит, $x_2 = -5$ — решение исходного уравнения.

Ответ: $\boxed{-5}$

3. Решите уравнение $\sqrt{5 - 7x + 2x^2} = 1 - x$

Решение. Из данного уравнения после возведения в квадрат обеих частей, получаем

$$5 - 7x + 2x^2 = (1 - x)^2, \qquad 5 - 7x + 2x^2 = 1 - 2x + x^2,$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

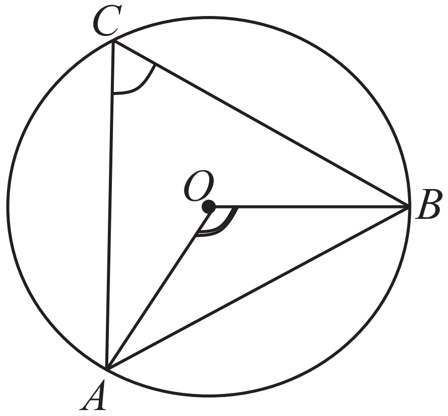
$$x_{1,\,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Отсюда $x_1 = 4$ или $x_2 = 1$.

Проверкой убеждаемся, что $x_2 = 4$ является посторонним решением, и только $x_1 = 1$ является решением данного уравнения.

Ответ: $\boxed{1}$

4. Найдите хорду, на которую опирается угол 60°, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.



Решение. Пусть O — центр окружности. Тогда $\angle ACB$ — вписанный, $\angle AOB$ — центральный. $\angle ACB = 60°$. Так как *угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла,* то $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$, следовательно, $\angle AOB = 2 \cdot \angle ACB = 2 \cdot 60° = 120°$.

Так как $AO = OB = \sqrt{3}$ — радиус окружности, то *по теореме косинусов* искомая хорда AB

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos AOB,$$

$$AB^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 120° = 6 - 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$AB^2 = 9, \qquad AB = 3$$

Ответ: $\boxed{3}$

5. Найдите точку максимума функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Решение. Данная функция определена и имеет производную на всей числовой прямой.

$$y' = \left(2x^3 - 9x^2 + 12x\right)' = 6x^2 - 18x + 12.$$

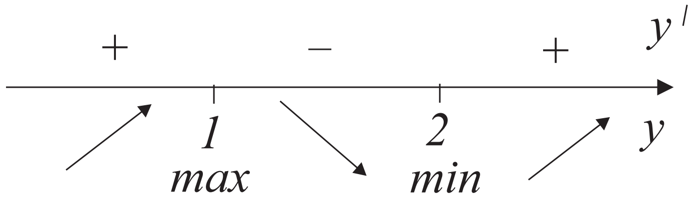
Из уравнения $y' = 0$ найдем критические точки функции.

$$6x^2 - 18x + 12 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x_{1,\,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2},$$

$$x_{1,\,2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad x_1 = 2 \quad \text{или} \quad x_2 = 1.$$

Исследуем знаки функции $y = 6(x-1)(x-2)$ на интервалах между критическими точками. Нарисуем знаковую кривую



Следовательно, точка $x = 1$ является точкой максимума функции y.

Ответ: $\boxed{1}$

6. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt[3]{400} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{80}}$$

Решение.

$$\frac{\sqrt[3]{400} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{80}} = \sqrt[3]{\frac{400 \cdot 25}{80}} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{5^3} = 5.$$

Ответ: $\boxed{5}$

Степень подробности при записи решения определяет сам абитуриент, при этом он должен показать, что знает свойства степени.

7. Бригада маляров красит забор длиной 240 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада

покрасила 60 метров забора. Определите, сколько дней бригада красила весь забор.

Решение. Математической моделью этой задачи является арифметическая прогрессия. Пусть a_1 — длина забора, покрашенного в первый день; a_n — длина забора, покрашенного в последний день; d — одно и то же число метров; n — количество дней, которые работала бригада.

По определению арифметической прогрессии и формуле суммы n первых членов

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

получаем

$$S_n = \frac{60}{2} \cdot n = 240 \qquad \Rightarrow \qquad 30 \cdot n = 240 \quad \Rightarrow \quad n = 8.$$

Ответ: $\boxed{8}$

8. Решите неравенство $\qquad 5^{2x+1} > 5^x + 4$

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Введем новую переменную $t = 5^x$, $\; t > 0$. Тогда имеем

$$\begin{cases} 5t^2 - t - 4 > 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

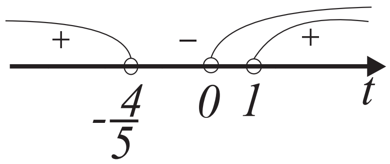
Решим первое неравенство системы методом интервалов.

$$5t^2 - t - 4 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 5}}{2 \cdot 5},$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{10}, \qquad t_1 = 1 \quad \text{или} \quad t_2 = -\frac{4}{5} \Longrightarrow$$

$$5t^2 - t - 4 > 0 \iff \left(t + \frac{4}{5}\right)(t-1) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(t + \frac{4}{5}\right)(t-1) > 0, \\ t > 0. \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} t > 0, \\ \left[\begin{array}{l} t < -\frac{4}{5}, \\ t > 1, \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow t > 1.$$

Вернемся к прежней переменной:

$$5^x > 1 \quad \text{или} \quad 5^x > 5^0.$$

Так как основание показательной функции $5 > 1$, то показательная функция монотонно возрастающая. При переходе к неравенству для показателя степени знак неравенства сохраняется. $\Rightarrow x > 0$.

Ответ: $\boxed{(0; +\infty)}$

9. Решите неравенство $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \leq 0$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 3x \neq 1, \\ 9x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ x \neq \frac{1}{9} \end{cases}$

Применим формулу перехода к новому основанию

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{2}{\log_3 3x}-\frac{6}{\log_3 9x}\leq 0.$$

По свойству логарифма произведения

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{2}{1+\log_3 x}-\frac{6}{2+\log_3 x}\leq 0.$$

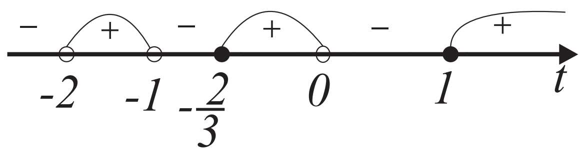
Введем новую переменную. Пусть $\log_3 x = t$. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{1}{t}+\frac{2}{1+t}-\frac{6}{2+t}\leq 0.$$

Приведем выражение слева к общему знаменателю.

$$\frac{3t^2-t-2}{t(t+1)(t+2)}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(t-1)(t+\frac{2}{3})}{t(t+1)(t+2)}\geq 0.$$

Для решения неравенства применим метод интервалов.



$$\left[\begin{array}{l}-2<t<-1,\\ -\frac{2}{3}\leq t<0,\\ t\geq 1\end{array}\right.$$

Вернемся к прежней переменной

$$\left[\begin{array}{l}-2<\log_3 x<-1,\\ -\frac{2}{3}\leq \log_3 x<0,\\ \log_3 x\geq 1;\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\log_3 3^{-2}<\log_3 x<\log_3 3^{-1},\\ \log_3 3^{-\frac{2}{3}}\leq \log_3 x<\log_3 1,\\ \log_3 x\geq \log_3 3.\end{array}\right.$$

Так как основание логарифма $3>1$, то логарифмическая функция монотонно возрастающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства сохраняется. $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \le x < 1, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$

Учитывая ОДЗ, получим $x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; 1\right) \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $\boxed{\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; 1\right) \cup [3; +\infty)}$

10. а) Решите уравнение $\frac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x - \sin x = \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Применим формулу двойного угла, затем сгруппируем слагаемые и вынесем общий множитель.

$\frac{1}{2}\sin 2x + \sin^2 x - \sin x = \cos x,$

$\sin x \cdot \cos x - \cos x + \sin^2 x - \sin x = 0,$

$\cos x \cdot (\sin x - 1) + \sin x \cdot (\sin x - 1) = 0,\ \ (\cos x + \sin x) \cdot (\sin x - 1) = 0,$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x - 1 = 0; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg} x = -1, \\ \sin x = 1; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \mathrm{arctg}(-1) + \pi n,\ n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi/2]$. Так как задан числовой отрезок на отрицательной полуоси, то значения n и k будем задавать отрицательные целые.

$n = -1 \ \Rightarrow \ x = -\frac{5\pi}{4} \in [-2\pi; -\pi/2];$

$k = -1 \ \Rightarrow \ x = -\frac{3\pi}{2} \in [-2\pi; -\pi/2].$

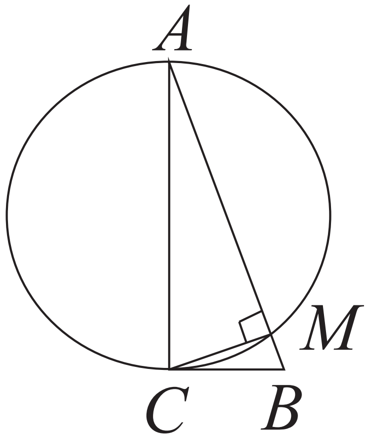
Убеждаемся, что для всех остальных n и k $\ x \notin [-2\pi; -\pi/2]$.

Получили числа $-\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: $\boxed{\text{а) } -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;\quad \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z;\ \text{б) } -\frac{3\pi}{2},\quad -\frac{5\pi}{4}}$

Замечание. Множество (область) значений функции арктангенс $E\left(\operatorname{arctg}\right)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. *Поэтому* $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

11. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке M. Найдите площадь треугольника ACM, если $AC=3$ и $BC=1$.



Решение. По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{10}$. Треугольник ACM — прямоугольный, так как *вписанный угол* $\angle AMC$ *опирается на диаметр* AC.

По свойству касательной и секущей:

$$BC^2=AB\cdot BM,\qquad 1=\sqrt{10}\cdot BM\quad\Rightarrow\quad BM=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Тогда $AM=AB-BM=\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{9\sqrt{10}}{10}$.

Найдем высоту CM, опущенную из вершины C прямоугольного треугольника ABC на гипотенузу AB. По формулам площади треугольника имеем

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CM=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\quad\Rightarrow CM=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Найдем площадь треугольника ACM

$$S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{9\sqrt{10}}{10} = \frac{27}{2 \cdot 10} = 1{,}35.$$

Ответ: $\boxed{1{,}35}$

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно решение системы $\begin{cases} x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x \in R, \quad a \in R.$

Применим координатно-параметрический метод: на плоскости aOx найдем множество точек $(a;x)$, значение параметра и координаты каждой из которых удовлетворяют смешанной системе. Рассмотрим первое неравенство системы.

$x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 4a + 2) \cdot (x + a) < 0.$

$$x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(5a+2) \pm \sqrt{(5a+2)^2 - 4 \cdot (4a^2 + 2a)}}{2} =$$

$$x_{1,\ ,2} = \frac{-(5a+2) \pm \sqrt{9a^2 + 12a + 4}}{2} =$$

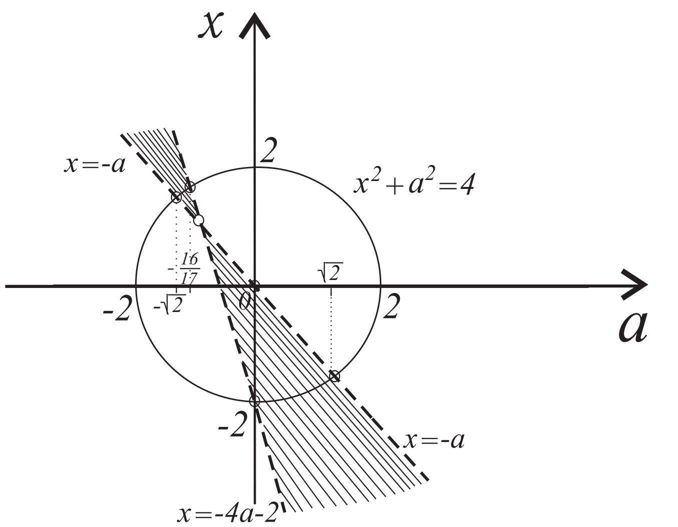
$$= \frac{-(5a+2) \pm \sqrt{(3a+2)^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(5a+2) \pm (3a+2)}{2}; \quad x_1 = -a, \quad x_2 = -4a - 2$$

Применяем метод частичных областей: определяем знак выражения $F(a,x) = (x + 4a + 2) \cdot (x + a)$ между прямыми

$x=-a$ и $x=-4a-2$. На координатно-параметрической плоскости множество всех точек $(a;x)$, значение параметра и координаты каждой из которых удовлетворяют неравенству $(x+4a+2)\cdot(x+a)<0$ заштриховано.

В случае решения задачи с параметром графическим методом должны быть верно построены графики функций, правильно подобран и отражен масштаб; должна быть содержательная таблица или объяснение построения; нужные в решении точки обозначены в соответствии с их координатами.



Второе уравнение системы $x^2+a^2=4$ представляет собой на координатно-параметрической плоскости окружность с центром в начале координат, радиусом $R=2$. Найдем точки пересечения прямых $x=-a$ и $x=-4a-2$ с окружностью $x^2+a^2=4$.

$$\begin{cases} x=-a, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2},\ a=\sqrt{2}; \\ x=\sqrt{2},\ a=-\sqrt{2}; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x=-4a-2, \\ x^2+a^2=4; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2,\ a=0; \\ x=\frac{30}{17},\ a=-\frac{16}{17}. \end{array} \right.$$

Искомое множество решений смешанной системы представляет собой дуги окружности $x^2+a^2=4$, находящиеся внутри заштрихованной области.

Таким образом, $-\sqrt{2}<a<-\frac{16}{17};\;\; 0<a<\sqrt{2}$.

Ответ: $\boxed{\left(-\sqrt{2};-\frac{16}{17}\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right)}$

4. Критерии оценивания заданий

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий, зависит от полноты и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развернутым ответом: все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии решения оценивается в 0 баллов.

Система оценивания выполнения заданий с развернутым ответом основывается на следующих принципах:

1. Возможны различные способы и записи развернутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений абитуриента. Оценивается полнота и обоснованность рассуждений. Оценивается продвижение абитуриента в решении задачи.

2. При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации программ среднего общего образования.

Решения задач должны содержать пояснения. В алгебраических примерах необходимо объяснить выкладки, провести проверку решений, указать все ограничения, возникающие как из условия, так и в ходе решения промежуточных уравнений и неравенств. Необходимо указывать, какому числовому множеству принадлежат n или k в записи решения тригонометрического уравнения.

Чертежи надо выполнять аккуратно (разрешается пользоваться линейкой). Все обозначения на чертеже должны соответствовать обозначениям, используемым в решении. Все действия при решении геометрической задачи надо записывать сначала в буквенных обозначениях, и лишь затем подставлять числовые данные. Необходимо ссылаться на теоремы и свойства. Например, подобие треугольников должно быть обосновано указанием признака подобия и выполнения соответствующих условий подобия.

Критерии оценивания

Баллы	Критерии оценивания
максимальный	Полное обоснованное решение.
90% макс.	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
75% макс.	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать правильным, после небольших исправлений или дополнений.
50% макс.	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно выполнен переход под знак логарифма в логарифмическом неравенстве или верно выполнен переход от тригонометрического уравнения к квадратному с последующим верным их решением.
2–3 балла	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения, имеющие отношение к решению задачи.
1 балл	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0 баллов	Решение отсутствует, либо дан правильный ответ без решения, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

5. Варианты заданий для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Студентами технических вузов собираются стать 32 выпускника школы. Они составляют 25% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?

2. Решите уравнение $(0,04)^{x-4} = 625 \cdot 5^{1-x}$

3. Решите уравнение $\sqrt{x+14} = x+2$

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\sin B = \frac{4}{5}$, $AC = 4$. CH — высота. Найдите AH.

5. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$, проведенная в точке $M_0(2;-4)$? Угол укажите в градусах.

6. Найдите значение выражения $3\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$.

7. Расстояние между городами A и B равно 630 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города A. Ответ дайте в км/ч.

8. Решите неравенство

$$\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$$

9. Решите неравенство $\log_2(x+15) - 2 \cdot \log_4(15-x) \leq 2$.

10. а) Решите уравнение

$$2 - \cos 2x + 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

11. Периметр равнобедренного треугольника относится к его боковой стороне как 18 : 5. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

12. При каких значениях параметра a уравнение $\left(x^2 - (4a-5)x + 3a^2 - 15a\right) \cdot \sqrt{x+15} = 0$ имеет ровно два решения?

Вариант 2

1. В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит 22 000 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой?

2. Решите уравнение $(0,25)^x \cdot 8^{2x+3} = 2$

3. Решите уравнение $\sqrt{x+46} = x + 4$

4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, CH — высота, $BH = 1,8$, $\sin A = 0{,}6$. Найдите AB.

5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t + 250$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеряемое с момента начала

движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 96 м/с?

6. Найдите значение выражения $\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin^2\frac{15\pi}{8}$

7. Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 180 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

8. Решите неравенство $\left(\frac{2}{9}\right)^{x^2+x} \geq (20,25)^{2x-7}$

9. Решите неравенство $\log_2\frac{x}{2} - 2\cdot\log_{\frac{x}{2}} 2 \leq 1$

10. а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin x = 2$.

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

11. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна 12, а косинус угла при основании трапеции равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

12. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $(3+a)x^2 - 2x - 3 + a = 0$ положительны?

Вариант 3

1. Цена на электрический чайник была повышена на 25% и составила 1625 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

2. Решите уравнение $(0,01)^x \cdot 1000^{2x+3} = 10$

3. Решите уравнение $\sqrt{x+27} = x - 3$

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $AC = 4$. CH — высота. Найдите BH.

5. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S(t) = -t^3 + 3t^2 + 3t + 6$. Какой путь пройдет точка к тому времени, когда ее скорость станет наибольшей?

6. Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\cos^2\frac{13\pi}{12} - \sqrt{3}$.

7. От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 153 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним со скоростью на 8 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

8. Решите неравенство $4^{x-1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2} \geq 0$

9. Решите неравенство $\log_{0,5}\frac{3x-2}{x+1} > 1$

10. а) Решите уравнение $2\sin^2 2x - 11\sin 2x - 6 = 0$.

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.

11. Длины боковых сторон трапеции равны 6 и 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно $5:11$. Найдите длины оснований трапеции.

12. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$a^{x+2} + 6 \cdot a^{x+1} + 12 \cdot a^x + 8 \cdot a^{x-1} - \frac{4}{a} > a + 4$$

Вариант 4

1. В квартире установлен прибор учета расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 января составляли 121 куб. м воды, а 1 февраля — 131 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за январь, если стоимость 1 куб. м воды составляет 46 руб. 51 коп.? Ответ дайте в рублях.

2. Решите уравнение $\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^{x-15} = (0,84)^{3x}$

3. Решите уравнение $\sqrt{x+3} = x+1$

4. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно 6. Синус внешнего угла при вершине B равен 0,8. Найдите боковую сторону.

5. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 196^{\,0,5\log_{14}(1-x^3)} + 3x^4 - 7x^3 - 48x^2$$

6. Найдите значение выражения $3\sqrt{2}\cos^2\frac{9\pi}{8} - 3\sqrt{2}\sin^2\frac{9\pi}{8}$

7. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 42 килограммов изюма, если виноград содержит 82% воды, а изюм содержит 19% воды?

8. Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x+5} \le \frac{1}{3^{x+1}-1}$$

9. Решите неравенство $\log_2\left(x^2-2x\right) < 3$

10. а) Решите уравнение $\sin x + 2\sin 2x = -\sin 3x$.

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

11. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 21, а длина катета BC равна 28. Окружность, центр O которой лежит на гипотенузе AC, касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} x^2 + (8a+4)x + 7a^2 + 4a < 0, \\ x^2 + a^2 = 16 \end{cases}$$
имеет решение.

Вариант 5

1. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 110 рублей за штуку и продаёт с наценкой 20%. Какое наибольшее количество таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

2. Решите уравнение $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$

3. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$

4. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 6$, $AD = 4$, $\sin A = 0{,}8$. Найдите большую высоту параллелограмма.

5. Вычислите
$$\frac{\sqrt[40]{10} \cdot 10 \cdot \sqrt[24]{10}}{\sqrt[15]{10}}$$

6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 27$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$.

7. Байдарка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

8. Решите неравенство $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2-3} \cdot (12,25)^{2x+1} \geq 1.$

9. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-7}{x+3} > 0$

10. а) Решите уравнение $\sin 4x = 2\cos^2 x - 1.$

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$.

11. Основание равнобедренного треугольника относится к его высоте как $3 : 2$. Найдите отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

12. При каких значениях параметра k уравнение

$$(k-1) \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{-x} + 1 = 0$$

имеет единственное решение?

Вариант 6

1. На автозаправке клиент отдал кассиру 1000 рублей и попросил залить бензин до полного бака. Цена бензина 37 руб. за литр. Клиент получил 75 рублей сдачи. Сколько литров бензина было залито в бак?

2. Решите уравнение $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$

3. Решите уравнение $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$

4. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.

5. Найдите наименьшее значение функции $y = 4\cos x + 13x + 9$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

6. Найдите числовое значение выражения
$$\frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ}$$

7. На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

8. Решите неравенство $3^{1+2x} - 10 \cdot 3^x + 3 < 0.$

9. Решите неравенство
$$\log_{\frac{x}{x+7}} 11 > \log_{\frac{x}{x+7}} 21$$

10. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$.

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -3\pi/2]$.

11. Диагональ равнобедренной трапеции составляет с боковой стороной и с основанием углы 15° и 45° соответственно. Найдите радиус описанной около трапеции окружности, если высота трапеции равна $\sqrt{6}$.

12. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{3^{x^2+1} - 3^{2-\sqrt{x}}}{a} = 3^{x^2} + 2\cdot 3^{-\sqrt{x}}$$

    имеет решение?

Вариант 7

1. Пакет молока стоит 60 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 15%. Сколько рублей заплатит пенсионер за пакет молока?

2. Решите уравнение $\log_3\left(x^2-3\right) = \log_3(2x)$

3. Решите уравнение $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$

4. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 16. Высота трапеции равна 10. Найдите тангенс острого угла.

5. Найдите точку минимума функции $y = x^3 + 12x^2 + 36x + 20$.

6. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

7. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист.

Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

8. Решите неравенство
$$2^{\frac{x+3}{x-3}} \geq 16^{-1}$$

9. Решите неравенство
$$\frac{1}{1-\lg x} < \frac{2\lg x - 5}{1+\lg x}$$

10. а) Решите уравнение $\quad \sin 2x = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right).$

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

11. В треугольнике $\triangle ABC$ величина угла С равна $60°$, а длина стороны $AB = \sqrt{31}$. На стороне AC отложен отрезок $AD = 3$. Найдите длину BC, если $BD = 2\sqrt{7}$.

12. Найдите множество значений параметра a, при которых существует хотя бы одно решение уравнения
$$\sin^4 2x - (3a-2)\sin^2 2x + 9a - 15 = 0.$$

Вариант 8

1. Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 940 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров

пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 29 рублей за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

2. Решите уравнение $\log_2\left(x^2+32\right)=\log_2 12x$

3. Решите уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$

4. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=15$, $BC=9$. Найдите $\cos A$.

5. Найдите абсциссы всех точек графика функции
$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{x^2-36}{x-6},$$
касательные в которых параллельны прямой $y=35x$ или совпадают с ней.

6. Найдите значение выражения
$$\frac{\sqrt[28]{3}\cdot 3\cdot\sqrt[21]{3}}{\sqrt[12]{3}}$$

7. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

8. Решите неравенство $3^{\frac{6x-3}{x}}<\sqrt[3]{27^{2x-1}}$

9. Решите неравенство $\log_x 3\cdot\log_{3x}3\cdot\log_3(81\cdot x)<1$

10. а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \sin x + \sqrt{3} \cdot \left(\sin x - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 2x\right) = 3\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

11. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ с острым углом $30°$ проведена высота CD из вершины прямого угла C. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, если меньший катет треугольника $\triangle ABC$ равен 1.

12. При каждом значении параметра a решите уравнение

$$2^{\frac{ax+3}{x^2+3}} + 2^{\frac{4x^2-ax+9}{x^2+3}} = 10$$

Вариант 9

1. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 10%. Книга стоит 550 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

2. Решите уравнение $\lg\left(x^2 - 6\right) = \lg(8 + 5x)$

3. Решите уравнение $\sqrt{3x+1} = x - 3$

4. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $60°$. Найдите тангенс угла BAD ($\angle BAD$ — внешний угол при вершине A). В ответе укажите $\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} BAD$.

5. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 30$.

6. Найдите значение выражения $4 \cdot \log_{1{,}25} 5 \cdot \log_5 0{,}8$.

7. Насос выкачивает воду из бассейна за 1,5 часа. Проработав 15 минут, насос остановился. Найдите объем бассейна, если в нем осталось 15 куб. метров воды.

8. Решите неравенство $\qquad 6^{\,1+x} + 6^{\,2-x} - 42 \le 0$

9. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 2} \le 1$$

10. а) Решите уравнение $\quad 4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0.$

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

11. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины A прямого угла опущена высота AH на гипотенузу BC. Известно, что $AC = 5,\quad HC = 3$. Найдите площадь треугольника ABC.

12. При каких значениях параметра k квадратный трехчлен

    $f(x) = x^2 - 2kx + k + 6$ имеет корни больше 1?

Вариант 10

1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 9% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,35 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 8 кг в течение суток?

2. Решите уравнение

$$\log_{\,0,4}(x+2) + \log_{\,0,4}(x+3) = \log_{0,4}(1-x)$$

3. Решите уравнение $\sqrt{1-x} = x+5$

4. В треугольнике ABC $AC = BC = 2\sqrt{2}$, угол C равен $45°$. Найдите высоту AH.

5. Прямая $y = -3x-5$ является касательной к графику функции $y = x^2 + 7x + c$. Найдите c.

6. Найдите значение выражения

$$\frac{\log_2 4}{\log_2 14} + \log_{14} 3{,}5$$

7. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 18 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 3 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 39 часов после отправления из него. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

8. Решите неравенство

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\dfrac{x-6}{x}} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\dfrac{2}{x}}$$

9. Решите неравенство

$$\frac{6 \cdot \log_2 x^2 - 20}{\log_2^2 x} \geq 1$$

10. а) Решите уравнение $\cos 2x + 0{,}25 = \cos^2 x$.

    б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

11. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает сторону AC в точке M, при этом $AM : MC = 3$. Перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает сторону AB в точке N, так что $AN : NB = 2$. Найдите углы треугольника ABC.

12. При каких значениях параметра b уравнение

$$25^x - (2b+5)\cdot 5^{x-\frac{1}{x}} + 10b\cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

6. Ответы к заданиям для самостоятельного решения

Вариант 1.

1. 128. **2.** 3. **3.** 2. **4.** 3,2. **5.** 45°. **6.** 0,84. **7.** 50. **8.** $(-\infty; \log_7 4) \cup (1; \log_7 9]$. **9.** $(-15; 9]$.**10.** а)$(-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$; б) $\frac{3\pi}{4}$. **11.** 0,32. **12.** $(-10; -5) \cup \{-2, 5\}$.

Вариант 2.

1. 24200. **2.** -2. **3.** 3. **4.** 5. **5.** 15. **6.** 1. **8.** $[-7; 2]$. **9.** $(0; 1] \cup (2; 8]$. **10.** а)$\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$; б) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$. **11.** 4,5. **12.** $(3; \sqrt{10}]$.

Вариант 3.

1. 1300. **2.** -2. **3.** 9. **4.** 1,8. **5.** 11. **6.** 1,5. **7.** 9. **8.** $[1; +\infty)$. **9.** $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. **10.** а) $-\frac{\pi}{12} + \pi n$; $-\frac{5\pi}{12} + \pi k$; б) $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$. **11.** 2; 14. **12.** $0 < a < 1$, $x < -\log_a(a+2)$; $a > 1$, $x > -\log_a(a+2)$; $a = 1$, $x \in R$.

Вариант 4.

1. 465,1. **2.** 3. **3.** 1. **4.** 5. **5.** -2. **6.** 3. **7.** 189. **8.** $(-1; 1]$. **9.** $(-2; 0) \cup (2; 4)$. **10.** а) $\frac{\pi}{2}n$; $\pi + 2\pi k$; б) 0; $\frac{\pi}{2}$; π. **10.** 12. **12.** $(-4; -2\sqrt{2}/5) \cup (0; 2\sqrt{2}/5)$.

Вариант 5.

1. 8. **2.** 6. **3.** 3. **4.** 4,8. **5.** 10. **6.** 6. **7.** 7. **8.** $[-1;5]$. **9.** $(7;+\infty)$. **10.** а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\frac{\pi}{12}+\pi m$; $\frac{5\pi}{12}+\pi k$; б) $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{12}$. **11.** $\frac{25}{12}$. **12.** $[1;+\infty)\cup\{\frac{7}{8}\}$.

Вариант 6.

1. 25. **2.** -4. **3.** -1. **4.** 5. **5.** 13. **6.** 12. **7.** 15. **8.** $(-1;1)$. **9.** $(0;+\infty)$. **10.** а) $\pi+2\pi n$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi m$; б) -3π; $-\frac{5\pi}{3}$. **11.** 2.
12. $[-2;0)\cup(0;3)$.

Вариант 7.

1. 51. **2.** 3. **3.** -1. **4.** 2. **5.** -2. **6.** $-0{,}1$. **7.** 10. **8.** $\left(-\infty;\frac{9}{5}\right]\cup(3;+\infty)$. **9.** $\left(0;\frac{1}{10}\right)\cup(10;+\infty)$. **10.** а) πn; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; б) $\frac{8\pi}{3}$; 3π; $\frac{10\pi}{3}$. **11.** 6.
12. $\left[\frac{5}{3};2\right]$.

Вариант 8.

1. 1827. **2.** 4; 8. **3.** -1. **4.** 0,8. **5.** -6. **6.** 3. **7.** 50. **8.** $(0;\frac{1}{2})\cup(3;+\infty)$. **9.** $(0;\frac{1}{9})\cup(\frac{1}{3};1)\cup(9;+\infty)$. **10.** а) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n$; б) $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.
12. $x=0$, $x=a$ при $a\in R$; $a\in(-\infty;-6\sqrt{2}]\cup[6\sqrt{2};+\infty)$, $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-72}}{6}$.

Вариант 9.

1. 495. **2.** 7. **3.** 8. **4.** -3. **5.** 2. **6.** -4. **7.** 18. **8.** $[0;1]$.
9. $\left(-\frac{7}{2};-1\right]\cup\left(1;\frac{3}{2}\right]$. **10.** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; б) $-\frac{11\pi}{6}$. **11.** $\frac{50}{3}$.
12. $[3;7)$.

Вариант 10.

1. 6. **2.** -1. **3.** -3. **4.** 2. **5.** 20. **6.** 1. **7.** 315. **8.** $(0;7]$. **9.** $[4;1024]$. **10.** а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$. **11.** $\angle A=45^\circ$; $\angle B=\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})$; $\angle C=\arcsin(\frac{3}{\sqrt{10}})$. **12.** $\left(0;\frac{1}{50}\right)\cup\left(\frac{25}{2};+\infty\right)$.

Желаем успехов! Ждем Вас в ТУСУРе!

Список рекомендуемой литературы

1. Алгебра. 9 класс. Учебник. В 2-х частях. ФГОС. Мордкович А. Г., Семенов П. В. — Изд-во: Мнемозина, 2019. — 456 с.: ил.

2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Комплект из 2-ух частей. Учебник+задачник / [А. Г. Мордкович, Л. И. Звавич, П. В. Семёнов и др.]; Под ред. А. Г. Мордковича. —Изд-во: Мнемозина, 2014.— 767 с.: ил.

3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник. Базовый и углубленный уровни.ФП / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников]. — М.: Просвещение, 2019. — 464 с. : ил.

4. Геометрия. 7 — 9 классы. Учебник / [Л. С. Антанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев].. — М.: Просвещение, 2019. — 384 с.: ил.

5. Гущин Д. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. [Электронный ресурс]. — URL: https://math-ege.sdamgia.ru/(дата обращения 28.01.2020).

6. Задачи с параметром / Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Изд. 3-е, перераб., доп.— М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005. — 328 с.

7. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учебное пособие / В. П. Моденов. — М.: Издательство "Экзамен", 2007. — 285, [3] с. (Серия "Абитуриент").