Математика
Решение открытого билета

Тексты задач в чистовик можно не переписывать. Достаточно краткой записи условия.

1. Цена на электрический чайник была повышена на 21% и составила 1815 рублей. Сколько стоил чайник до повышения цены?

   Решение. Пусть x рублей — цена чайника до повышения. Тогда

$$\begin{array}{rl} 1815 & \text{руб.} - 121\% \\ x & \text{руб.} - 100\% \end{array}$$

   Отсюда,

$$x = \frac{1815 \cdot 100}{121} = 1500 \quad \text{руб.}$$

   Ответ: $\boxed{1500}$

2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-12} = 8.$

   Решение. ОДЗ: $x \in R$.

   Перепишем уравнение в виде

$$2^{-(3x-12)} = 2^3; \quad -3x + 12 = 3; \quad -3x = -9; \quad x = 3.$$

   Ответ: $\boxed{3}$

3. Решите уравнение $4\sqrt{x-1} = 6 - x.$

   Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат, чтобы избавиться от внешнего корня: $\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 = (6-x)^2$, $16(x-1) = 36 - 12x + x^2$, $x^2 - 28x + 52 = 0.$

   Решение квадратного уравнения нужно приводить полностью!

$$x_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 52}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{28 \pm 24}{2};$$

   $x_1 = 2$ или $x_2 = 26.$

   Проверка. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

$x_1 = 2 \qquad 4 \cdot \sqrt{1} = 4, \qquad 4 = 4$ — истина $\Rightarrow \quad x_1 = 2$ является корнем уравнения.

$x_2 = 26 \qquad 4 \cdot \sqrt{25} = -20 \quad \Rightarrow \quad 20 = -20$ — ложно
$\Rightarrow x_2 = 26$ — посторонний корень.

Абитуриент может привести другое решение задачи. Решение уравнения с одним квадратным корнем сводится к решению системы

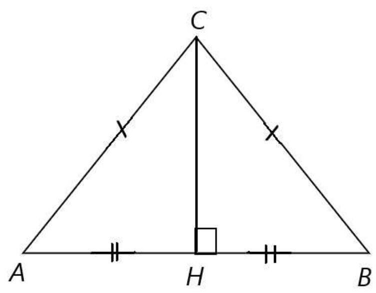
$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) = \varphi^2(x). \end{cases}$$

Так как значение квадратного корня всегда положительное число, то отсюда следует ограничение на значение переменной x*:*
$x \leq 6$*. Если решение иррационального уравнения сведено к решению системы, то этим ограничением можно воспользоваться при отборе корней уравнения.* $x_2 = 26$ *— посторонний корень, так как не удовлетворяет ограничению* $x \leq 6$.

Ответ: $\boxed{2}$

4. В $\triangle ABC \quad AC = BC = 20, \quad AB = 32$. Найдите $\sin A$.

Решение.



Опустим высоту CH на основание AB. Так как $\triangle ACB$ — равнобедренный, то CH — высота, медиана, биссектриса.

Следовательно, $AH = HB = \frac{AB}{2} = 16$. По теореме Пифагора

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{(20-16) \cdot (20+16)} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 36} = 2 \cdot 6 = 12.$$

Тогда $\sin A = \frac{CH}{AC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

При необходимости сопроводите решение чертежом!

Ответ: $\boxed{\frac{3}{5}}$

5. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $S_1(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$ и $S_2(t) = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (S — в метрах, t — в секундах). Найдите ускорения точек в тот момент, когда их скорости равны.

   Решение.

$$V_1(t) = S_1'(t) = \left(2t^3 - 5t^2 - 3t\right)' = 6t^2 - 10t - 3;$$

$$V_2(t) = S_2'(t) = \left(2t^3 - 3t^2 - 11t + 7\right)' = 6t^2 - 6t - 11.$$

   Так как по условию $V_1(t) = V_2(t)$, то

$$6t^2 - 10t - 3 = 6t^2 - 6t - 11, \qquad 4t = 8, \qquad t = 2.$$

   Тогда

$$a_1(t) = V_1'(t) = \left(6t^2 - 10t - 3\right)' = 12t - 10, \qquad a_1(t = 2) = 12 \cdot 2 - 10 = 14;$$

$$a_2(t) = V_2'(t) = \left(6t^2 - 6t - 11\right)' = 12t - 6, \qquad a_2(t = 2) = 12 \cdot 2 - 6 = 18.$$

   Ответ: $\boxed{14;\ 18}$

6. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

   Решение. $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha; \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - (0,6)^2} = \pm 0,8.$$

   Так как $\alpha \in$ IV четверти, то $\sin\alpha < 0$, следовательно, $\sin\alpha = -0,8$.

   $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot (-0,8) \cdot 0,6 = -0,96$.

   Ответ: $\boxed{-0,96}$

7. Два велосипедиста отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч — скорость второго велосипедиста. Составим таблицу по данным задачи:

	S	V	$t = \frac{S}{V}$
I	130 км	$(x+3)$ км/ч	$\frac{130}{x+3}$ ч
II	130 км	x км/ч	$\frac{130}{x}$ ч

Так как $t_2 - t_1 = 3$ ч, то составим уравнение:

$$\frac{130}{x} - \frac{130}{x+3} = 3, \quad x > 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 130 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета,

$$\left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 \cdot x_2 = -130; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -13, \\ x_2 = 10. \end{array}\right.$$

Корень уравнения $x_1 = -13$ — посторонний, так как $x > 0$ по условию задачи. Значит, скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, 10 км/ч.

Ответ: $\boxed{10}$

8. Решите неравенство $\quad 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-3} \leq \left(\frac{1}{64}\right)^x$

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Приведем обе части неравенства к одинаковому основанию $\frac{1}{4}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-3} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}; \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x-5} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}.$$

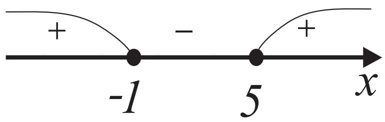
Так как основание показательной функции
$0 < \frac{1}{4} < 1$, то показательная функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству в показателе степени знак неравенства меняется на противоположный: $x^2 - x - 5 \geq 3x, \quad x^2 - 4x - 5 \geq 0.$

$f(x) = x^2 - 4x - 5.$ Решим неравенство методом интервалов. Найдем нули функции — критические точки.

$$x^2 - 4x - 5 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}.$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 5 \Rightarrow (x+1)(x-5) \geq 0$$

Критические точки разбивают числовую ось на три интервала. Определяем знак левой части неравенства на каждом интервале. Исследуем сами критические точки: неравенство нестрогое, точки входят во множество решений.

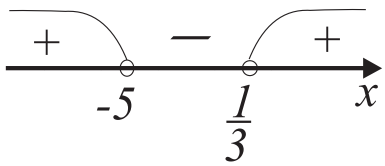


$x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $\boxed{(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)}$

9. Решите неравенство $\qquad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1$

Решение. ОДЗ: $\frac{3x-1}{x+5} > 0$. Решим неравенство методом интервалов.



Итак, ОДЗ: $x \in (-\infty; -5) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Перейдем к одинаковому основанию $\frac{1}{3}$.

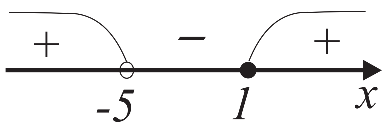
$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+5} \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}.$$

Так как основание логарифма $0 < \frac{1}{3} < 1$, то логарифмическая функция монотонно убывающая. При переходе к неравенству для выражений под знаком логарифма знак неравенства меняется на противоположный.

$$\frac{3x-1}{x+5} \geq \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3x-1}{x+5} - \frac{1}{3} \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

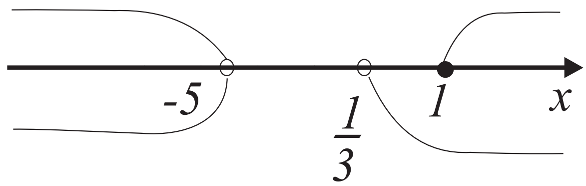
$$\frac{9x-3-x-5}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{8x-8}{3(x+5)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{x+5} \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов.



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

Учитывая ОДЗ, получим



$x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

Ответ: $\boxed{(-\infty; -5) \cup [1; +\infty)}$

10. а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение. а) Найдем общее решение уравнения $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$6\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0.$$

Пусть $\sin x = t, \quad t \in [-1; 1]$.

$$6t^2 - 5t - 4 = 0, \quad \Longrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 6}}{2 \cdot 6} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{5 \pm 11}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{4}{3}, \\ t_2 = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$$

Корень уравнения $t_1 = \frac{4}{3}$ — посторонний, так как $t \in [-1; 1]$. Обратная замена: $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда имеем совокупность решений

$$\left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, & n \in Z; \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, & k \in Z. \end{array}\right.$$

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. Подставим в общее решение $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$, целые значения n.

$n = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} \notin [-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$;

$n = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13\pi}{6}; \quad x = -\frac{13\pi}{6} \in [-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$;

$n=-2 \;\;\Rightarrow\;\; x=-\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{25\pi}{6};\;\; x=-\frac{25\pi}{6}\notin[-\frac{5\pi}{2};-\pi]$.

Подставим в общее решение $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\;\; k\in Z$, целые значения k.

$k=0 \;\;\Rightarrow\;\; x=-\frac{5\pi}{6}\notin[-\frac{5\pi}{2};-\pi]$,

$k=-1 \;\;\Rightarrow\;\; x=-\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{17\pi}{6};\;\; x=-\frac{17\pi}{6}\notin[-\frac{5\pi}{2};-\pi]$.

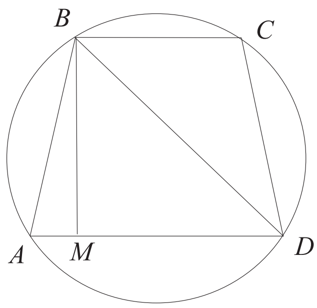
Получили число: $-\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: $\boxed{\text{а) } x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\quad n\in Z;\;\; x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in Z;}$

$\boxed{\text{б) } -\frac{13\pi}{6}.}$

Замечание. Общее решение уравнения $\sin x=a$ *может быть записано с использованием формулы* $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n, n\in Z$. *Как общее решение, так и отобранные корни уравнения могут быть записаны только в градусах. При этом смешанная запись единиц измерения углов, такая как, например,* $x=90^\circ+2\pi n$ *считается грубой ошибкой. Отбор корней, принадлежащих отрезку, может быть выполнен с помощью единичной окружности.*

11. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основание $AD=3\sqrt{10}$, основание $BC=\sqrt{10}$, высота $BM=2\sqrt{10}$. Найдите радиус описанной окружности.



Решение. Окружность, описанная около трапеции, является также описанной вокруг $\triangle ABD$. По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=2R.$$

В $\triangle ABM$ найдем AM. Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то $AM=\frac{AD-BC}{2}=\sqrt{10}$.

По теореме Пифагора

$$AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{50}.$$

В $\triangle BMD$ найдем $MD = BC + AM = 2\sqrt{10}$.

По теореме Пифагора найдем BD

$BD = \sqrt{MD^2 + BM^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2} = \sqrt{80}$.

Отсюда находим $\sin\angle ADB = \frac{BM}{BD} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{80}} = \frac{2}{\sqrt{8}}$. Тогда

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ADB} = \frac{\sqrt{50}}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt{50\cdot 8}}{4} = \frac{\sqrt{400}}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Ответ: $\boxed{5}$.

Геометрическая задача оценивается максимальным баллом, если правильно выполнен чертеж; приведены буквенные выражения искомых величин, и лишь затем подставлены их числовые значения; приведено полное обоснование с ссылками на геометрические свойства, теоремы, признаки подобия.

12. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - (3a-1)|x| + 2a^2 - a = 0$$

имеет четыре различных решения?

Решение. ОДЗ: $x \in R$, $a \in R$.

I способ. Введем новую переменную. Пусть $t = |x|$, $t \geq 0$. Эту задачу можно сформулировать иначе: “При каких значениях параметра a уравнение $t^2 - (3a-1)t + 2a^2 - a = 0$ имеет два различных положительных корня ?” Действительно, если, уравнение имеет два различных положительных корня t_1 и t_2 $(t_1 \neq t_2)$, то исходное уравнение имеет четыре различных корня t_1, $-t_1$, t_2 $-t_2$ (более четырех корней исходное уравнение иметь не может, поскольку при $x \geq 0$ и при $x < 0$ это уравнение — квадратное).

Найдем корни уравнения $t^2 - (3a-1)t + 2a^2 - a = 0$. Вычислим дискриминант D:

$$D = (3a-1)^2 - 4(2a^2 - a) = 9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 + 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2,$$

$$t_{1,2} = \frac{3a - 1 \pm \sqrt{(a-1)^2}}{2} = \frac{3a - 1 \pm (a-1)}{2};$$

откуда $t_1 = a, \quad t_2 = 2a - 1$.

Исходное уравнение имеет четыре корня тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три условия: $t_1 > 0, \quad t_2 > 0, \quad t_1 \neq t_2$. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} a > 0, \\ 2a - 1 > 0, \\ 2a - 1 \neq a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Итак, $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $\boxed{\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)}$

Замечание. В этом случае корни квадратного уравнения удается выразить через параметр, так как дискриминант является полным квадратом некоторого выражения. Данный способ решения является наиболее рациональным. Абитуриент может привести другой способ решения задачи, основанный на применении условий расположения корней квадратичной функции относительно заданных точек.

Задача с параметром оценивается максимальным баллом при наличии подробного обоснованного решения с необходимыми словесными пояснениями. Набор формул с правильным ответом без обоснования и пояснений оценивается меньшим баллом. Правильный ответ без обоснований и пояснений — 0 баллов.