ОРМО 2017-2018 I этап

МАТЕМАТИКА
8-9 класс

1. Два лыжника стартовали на дистанции 10 км друг за другом с интервалом в 6 минут. Второй лыжник догнал первого в двух километрах от старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от поворота. Найти скорость первого лыжника.

(7 баллов)

Ответ: 10 км/ч.

Решение. Обозначим x км/час – скорость первого лыжника, y км/час – скорость второго лыжника.

Тогда, согласно условию задачи, получаем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{2}{x} = \frac{2}{y} + \frac{1}{10} \\ \frac{4}{x} = \frac{6}{y} + \frac{1}{10} \end{cases}$. Решая эту систему,

находим x=10 км/ч , y=20 км/ч.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

Верно составлены оба уравнения (при этом они могут отличаться от приведённых в решении, если использованы другие неизвестные), но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – 4 балла.

2. На доске записаны 20 натуральных чисел. Известно, что сумма любых одиннадцати чисел из них больше 1000, а сумма любых десяти чисел из них меньше 1000. Докажите, что среди них найдется число от 90 до 100.

(8 баллов)

Решение. Предположим наоборот, что таких чисел не существует. Тогда каждое число либо меньше 90 (такие числа назовем «маленькими»), либо больше 100 (такие числа назовем «большими»). Тогда «больших» чисел будет не больше 9, иначе найдутся 10 чисел, дающих в сумме больше 1000. Но тогда «маленьких» чисел — не меньше 11, а 11 «маленьких» чисел дают в сумме меньше 1000. Противоречие.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 8 баллов.

Обоснованно получена одна из оценок для «маленьких» или «больших» чисел – 3-4 балла.

Получен верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

3. Кенгуру прыгает только вперёд на 1 или на 3 метра. Он хочет преодолеть ровно 10 метров. Сколькими способами он может это сделать?

(10 баллов)

Ответ. 28.

Решение. Есть 4 варианта представления числа 10 в виде суммы троек или единиц:
10=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1+1+3=1+1+1+1+3+3=1+3+3+3. Первое разбиение предлагает всего один способ преодоления расстояния в 10 метров.

Во втором разбиении единственная тройка может быть одним из восьми слагаемых, что даёт 8 вариантов.

Из третьего разбиения можно получить 15 вариантов расположения прыжков в 3 метра.

В четвертом разбиении единственная единица может быть одним из четырёх слагаемых, что даёт ещё 4 варианта.

Всего 1+8+15+4=28 вариантов.

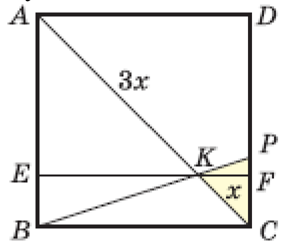
Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 10 баллов.

Указаны все варианты представления числа 10 в виде суммы троек или единиц, и при этом верно вычислены варианты расположения прыжков во втором и в четвертом представлениях числа десять – 6 баллов.
Указаны все четыре варианта представления числа 10 в виде суммы троек или единиц – 2 балла.
Приведён верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.

4. Точка K делит диагональ AC квадрата $ABCD$ в отношении 3 : 1. Прямые BK и CD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPC, если сторона квадрата равна 4.

(10 баллов)

Ответ: 2/3 или 18.
Решение. Рассмотрим первый случай. Пусть $AK : KC = 3 : 1$ (см. рис.).



Треугольник AKB подобен треугольнику CKP, следовательно, соответствующие стороны и высоты пропорциональны:

$$\frac{AB}{CP}=\frac{EK}{KF}=\frac{AK}{KC}=\frac{3}{1}.$$

Отсюда получаем, что $\frac{AB}{CP}=\frac{3}{1}$, $\frac{4}{CP}=\frac{3}{1}\Rightarrow CP=\frac{4}{3}$, далее, $\frac{EK}{KF}=\frac{3}{1}\Rightarrow EK=3KF$. Так как $BC=4$ и $BC=EF$, то $KF=1$. Теперь находим $S_{KPC}=\frac{1}{2}\cdot CP\cdot KF=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$.

При рассмотрении второго случая, когда $AK : KC = 1 : 3$, производя аналогичные рассуждения, получим, что $S_{KPC}=18$.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 10 баллов.
Рассмотрены оба случая, в одном случае обоснованно получен верный ответ, а при рассмотрении другого случая получен неверный ответ из-за арифметической ошибки – 8 баллов.
Рассмотрены оба случая и в каждом из них получен неверный ответ из-за арифметической ошибки – 6 баллов.
Рассмотрен только один случай и обоснованно получен верный ответ – 5 баллов.

5. Сто один человек купили 212 воздушных шаров четырех цветов, причем ни у кого не было двух шаров одного цвета. Число человек, купивших 4 шара на 13 больше числа, купивших 2 шара. Сколько человек купили только один шар?

(15 баллов)

Ответ: 52.
Решение. Из условия следует, что каждый человек купил не более четырех шаров. Пусть x, y, z, t – число человек, купивших 1, 2, 3, 4 шара соответственно. По условию $x+y+z+t=101$, $x+2y+3z+4t=212$, $t=y+13$. Исключая y, z, t, получим x=52.
Критерии. Обоснованно получен верный ответ – 15 баллов.
Верно составлены все уравнения (при этом они могут отличаться от приведённых в решении, если использованы другие неизвестные), но получен неверный ответ из-за арифметической ошибки – 10 баллов; если при этом не указано, что каждый человек купил не более четырех шаров, то – 8 баллов.
Приведён частный случай решения системы, например 52,18,0,31; 52,10,16,23 и т.п. – 6 баллов.
Приведён верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 0 баллов.
Замечание. Переменные y, z, t в этой задаче определяются неоднозначно.