**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (9 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

 **1 ВАРИАНТ**

 **(ОТВЕТЫ)**

**1.** Найдите сумму чисел:

**(7 баллов)**

**Ответ:** .

**Решение:**

**2.** Функция *f* удовлетворяет равенству для каждого значения *x*, не равного 0 и 1. Найдите . **(7 баллов)**.

**Ответ:**

**Решение:**

Подставим в исходное равенство вместо Получим вместе с исходным равенством систему линейных уравнений относительно

Решая полученную систему, находим . Следовательно,

**3.** Для любой пары чисел определена некоторая операция «», удовлетворяющая следующим свойствам: и где операция «» − операция умножения. Найдите корень уравнения:  **(7 баллов)**

**Ответ:** **4036.**

**Решение:**

Учитывая условие задачи, имеем . Тогда

1)

2)

Следовательно, .

**4.** Всех пассажиров небольшого морского лайнера «Победа» в случае экстренной эвакуации можно разместить в 5-ти и 9-ти местных шлюпках, причем 9-ти местных шлюпок больше, чем 5-тиместных. Если число 9-ти местных шлюпок увеличить вдвое, то общее число шлюпок будет более 24, а если увеличить вдвое число 5-ти местных шлюпок, то общее число шлюпок будет меньше 27. Определите число пассажиров морского лайнера «Победа».

  **(7 баллов)**

**Ответ:** 60 возможных вариантов приведены в таблице ниже.

**Решение:**

Пусть *x*, *y* ─ число 5-ти, 9-ти местных шлюпок соответственно, а *z* ─ число всех пассажиров.

Тогда , где удовлетворяют системе неравенств:

Рассмотрим первые два неравенства системы более детально.

1) Умножая первое неравенство на 2), имеем Сложим эти два неравенства и получим следовательно, **.**

2) Умножая второе неравенство на 2), имеем Сложим эти два неравенства и получим следовательно, **.**

Далее перебор, удовлетворяющий системе неравенств и полученным ограничениям, а затем вычисление ─ числа всех пассажиров (значения *z* расположены в ячейках на пересечении строк и столбцов для соответствующих *x*, *y* ).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y/x | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  | 121 | 116 |  |  |  |  |  |  |
| 10 |  | 130 | 125 | 120 | 115 |  |  |  |  |
| 11 |  |  | 134 | 129 | 124 | 119 | 114 |  |  |
| 12 |  |  | 143 | 138 | 133 | 128 | 123 | 118 | 113 |
| 13 |  |  |  | 147 | 142 | 137 | 132 | 127 | 122 |
| 14 |  |  |  | 156 | 151 | 146 | 141 | 136 | 131 |
| 15 |  |  |  |  | 160 | 155 | 150 | 145 | 140 |
| 16 |  |  |  |  | 169 | 164 | 159 | 154 | 149 |
| 17 |  |  |  |  |  | 173 | 168 | 163 | 158 |
| 18 |  |  |  |  |  | 182 | 177 | 172 | 167 |
| 19 |  |  |  |  |  |  | 186 | 181 | 176 |
| 20 |  |  |  |  |  |  | 195 | 190 | 185 |
| 21 |  |  |  |  |  |  |  | 199 | 194 |
| 22 |  |  |  |  |  |  |  | 208 | 203 |
| 23 |  |  |  |  |  |  |  |  | 212 |
| 24 |  |  |  |  |  |  |  |  | 221 |
| 25 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**5.** Косинус угла между боковыми сторонами *AD* и *BC* трапеции *ABCD* равен 0,8. В трапецию вписана окружность, причем сторона *AD* делится точкой касания на отрезки длины 1 и 4. Определите длину боковой стороны *BC* трапеции. **(7 баллов)**

**Ответ:** **4** или  **.**

**Решение:** Пусть точка пересечения прямых *AD* и *BC*; *K*, *L*, *M*точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами *AB*, *AD* и *CD* соответственно, ее центр. Тогда , , как радиусы, и поскольку точки *K*, *O*, *M* лежат на одной прямой, то есть *KM* Условию задачи отвечают два возможных случая расположения точки *L* на стороне *AD* .

**1)** В этом случае , (рис.2). Тогда , . Опустим . Учитывая, что , получаем , . В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна , катет , следовательно, . Значит, , а учитывая условие задачи, приходим к выводу, что , а прямаяСледовательно, трапеции прямой, а длина .

**2)** В этом случае , (рис.3). Как и раньше, длина перпендикуляра , , , sin. Острый угол является внешним для трапеции и треугольника , поэтому . Учитывая, что , находим sin , sin. Так как , то .

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019**

**МАТЕМАТИКА (9 КЛАСС)**

**ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

 **2 ВАРИАНТ**

 **(ОТВЕТЫ)**

**1.** Найдите сумму чисел:

**Ответ:** .

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**2.** Функция *f* удовлетворяет равенству для каждого значения *x*, не равного 0 и 1. Найдите . **(7 баллов)**

**Ответ:** **─ 2018.**

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**3.** Для любой пары чисел определена некоторая операция «», удовлетворяющая следующим свойствам: и где операция «» − операция умножения. Найдите корень уравнения: .  **(7 баллов)**

**Ответ:** **6057**.

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**4.** Всех пассажиров небольшого морского лайнера «Победа» в случае экстренной эвакуации можно разместить в 7-ми и 11-ти местных шлюпках, причем 11-ти местных шлюпок больше, чем 7-ми местных. Если число 11-ти местных шлюпок увеличить вдвое, то общее число шлюпок будет более 25, а если увеличить вдвое число 7-ми местных шлюпок, то общее число шлюпок будет меньше 29. Определите число пассажиров морского лайнера «Победа».

 **(7 баллов)**

**Ответ:** 60 возможных вариантов приведены в таблице ниже.

**Решение:**

Пусть *x*, *y* ─ число 7-ти, 11-ти местных шлюпок соответственно, а *z* ─ число всех пассажиров.

Тогда , где удовлетворяют системе неравенств:

Рассмотрим первые два неравенства системы более детально.

1) Умножая первое неравенство на 2), имеем Сложим эти два неравенства и получим следовательно, **.**

2) Умножая второе неравенство на 2), имеем Сложим эти два неравенства и получим следовательно, **.**

Далее перебор, удовлетворяющий системе неравенств и полученным ограничениям, а затем вычисление ─ числа всех пассажиров (значения *z* расположены в ячейках на пересечении строк и столбцов для соответствующих *x*, *y* ).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y/x | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9 |  | 155 |  |  |  |  |  |  |  |
| 10 | 173 | 166 | 159 | 152 | 156 |  |  |  |  |
| 11 |  | 177 | 170 | 163 | 167 | 149 |  |  |  |
| 12 |  | 188 | 181 | 174 | 178 | 160 | 153 | 146 |  |
| 13 |  |  | 192 | 185 | 189 | 171 | 164 | 157 | 150 |
| 14 |  |  | 203 | 196 | 200 | 182 | 175 | 168 | 161 |
| 15 |  |  |  | 207 | 211 | 193 | 186 | 179 | 172 |
| 16 |  |  |  | 218 | 222 | 204 | 197 | 190 | 183 |
| 17 |  |  |  |  | 233 | 215 | 208 | 201 | 194 |
| 18 |  |  |  |  |  | 226 | 219 | 212 | 205 |
| 19 |  |  |  |  |  | 237 | 230 | 223 | 216 |
| 20 |  |  |  |  |  | 248 | 241 | 234 | 227 |
| 21 |  |  |  |  |  |  | 252 | 245 | 238 |
| 22 |  |  |  |  |  |  | 263 | 256 | 249 |
| 23 |  |  |  |  |  |  |  | 267 | 260 |
| 24 |  |  |  |  |  |  |  | 278 | 271 |
| 25 |  |  |  |  |  |  |  |  | 282 |
| 26 |  |  |  |  |  |  |  |  | 293 |

**5.** Угол между боковыми сторонами *AB* и *CD* трапеции *ABCD* равен . В трапецию вписана окружность, причем сторона *AB* делится точкой касания на отрезки длины и . Определите длину боковой стороны *CD*  трапеции.  **(7 баллов)**

**Ответ:** **6**  или **12.**

**Решение:** аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.  |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.  |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |